UMA ABORDAGEM SOBRE OS NÚMEROS PRIMOS

AN APPROACH TO PRIMARY NUMBERS

Ellen Caroline Sousa Silva 1
Artur Silva Santos 2

Resumo: Este artigo tem como objetivo apresentar uma pequena abordagem sobre os números primos e suas propriedades. Assunto que vem atraindo muitos matemáticos eminentes desde o princípio, e ainda hoje nos apresenta muitos desafios. Inicia-se com os conceitos mais fundamentais sobre o tema. Em seguida, apresentam-se algumas demonstrações clássicas da infinidade de números primos. Citam-se algumas funções que geram números primos. E por fim, tecem-se alguns comentários a respeito de casos particulares de números primos que foram estudados.

Palavras-Chave: Teoria dos Números. Números Naturais. Números Primos.

Abstract: This article aims to present a small approach to prime numbers and their properties. A subject that has attracted many eminent mathematicians since the beginning, and still presents us with many challenges. It starts with the most fundamental concepts on the topic. Then, some classic demonstrations of the infinity of prime numbers are presented. Some functions that generate prime numbers are mentioned. Finally, some comments are made regarding the particular cases of prime numbers that have been studied.

Keywords: Number Theory. Natural Numbers. Prime Numbers.

1-Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Maranhão, polo de Santa Luzia, vinculado ao Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica/PARFOR. Docente da Educação Infantilna Pre Escola Criança Feliz em Pindaré Mirim -MA.LATTES: http://lattes.cnpq.br/0644649221282963. Orcid: https://orcid.org/0000-0003-0797-5591.

2-Possui graduação em Licenciatura Plena Em Matemática pela Universidade Federal do Maranhão (1993), graduação em Licenciatura Plena Em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1990), graduação em Ciências Com Habilitação Em Matemática pela Federação da Faculdades Celso Lisboa (1988) e mestrado em Matemática Pura pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2004). Atualmente é professor de Ensino Médio - Colégio Militar 2 de Julho, é Professor Assistente da Universidade Federal do Maranhão.LATTES: http://lattes.cnpq.br/0644649221282963. Orcid:https://orcid.org/0000-0002-6694-4632

Introdução

Deste os primórdios da humanidade o homem utiliza a matemática para solucionar seus problemas. Sejam eles de qualquer natureza: prática ou teórica. Os filósofos e os matemáticos da Grécia antiga foram os primeiros a perceber que a matemática ia muito além de uma ferramenta de contagem e cálculos simples.

Com o desenvolvimento da humanidade surge a necessidade de buscar maneiras mais adequadas de escrever números e efetuar cálculos. *Tales de Mileto* e *Pitágoras* tiveram grande importância na idealização e desenvolvimento dessa ciência. A partir de seus trabalhos surgiu a *Teoria dos Números* que tem como base os números primos.

Os gregos antigos tinham conhecimento muito importante sobre o que envolviam os *números primos*. Porém, foi o matemático *Euclides de Alexandria* que deu forma aos números primos que se tem nos livros didáticos de hoje. Os números primos possuem papel fundamental nas áreas engenharia, da matemática e da computação. Por exemplo na área da computação eles são utilizados na informática, proteção de informações e criptografia.

Este artigo tem como objetivo geral apresentar os números primos, suas propriedades e como é abordado em sala de aula do Ensino Fundamental, relacionando com o cotidiano do aluno e suas expectativas de aprendizagem.

É incrível como deixamos passar despercebidos a importância da matemática no nosso cotidiano. Muitas pessoas julgam a matemática como chata, complicada, alguns até mesmo a julgam não servir para nada. Essas pessoas com certeza não tiveram uma boa experiência docente para lhes mostrar o quão interessante é a matemática. Todos seus conteúdos são parte relevante para uma boa compreensão do todo.

O conhecimento desde a formação de um número simples até os mais complexos faz parte da vida de estudantes que não se cansam em aprender e descobrir um mundo maravilhoso dos números.

Com este artigo pretende-se demonstrar que os números primos são considerados essenciais para a existência da matemática. Essa importância é atribuída aos números, devido ao princípio central que eles possuem nas mais variadas teorias, principalmente no *Teorema Fundamental da Aritmética (TFA).*

Os números primos são importantíssimos para a civilização contemporânea, pois eles são a ideia chave por trás dos sistemas de criptografia do mundo moderno. O estudo desses números vem sendo desde muito tempo aprimorado, onde aconteceram várias descobertas ao seu respeito. Sabemos que um número primo é todo aquele divisível por 1 e por ele mesmo, isso é o que ensinamos para os nossos alunos em sala de aula, mas além disso o estudo destes números é bem complexo e traz consigo problemas que não foram resolvidos até hoje.

Além do conhecimento básico que a maioria dos professores passam para os alunos sobre os números primos, torna-se fundamental apresentar um contexto histórico sobre esses números buscando chamar a atenção e buscando a compreensão do conteúdo estudado de forma mais aprofundada. Levando em consideração o uso deles na nossa realidade.

Com esse artigo objetiva mostrar um estudo sobre os números primos e como eles se tornaram importante para a vida do homem atual. Neste estudo foi feita uma pesquisa bibliográfica sobre a história dos números, sua formação e sua relevância atualmente. Pois, sabe-se que a matemática está presente na vida de todos nós e por isso sua aprendizagem é tão importante para o desenvolvimento dos alunos na vida escolar e fora dela.

Um breve histórico sobre os números primos

Os números primos são estudados desde a época de antigos matemáticos, na Grécia, até os dias atuais. Suas propriedades e aplicações encantam muitos estudiosos. Receberam este nome devido aos gregos, que dividiam os números em primários e secundários. Daí os romanos traduziram a palavra grega para primeiro, que em latim é primus.

A escola pitagórica dava grande importância ao número ''1'', que era chamado de unidade, já os demais números tinham pouca importância.

Com isso os pitagóricos começaram a observar que existiam dois tipos de números, os *números primos* e os *números compostos*. Os *números primos* são números que não podem ser gerados pela multiplicação, a partir de outro número, por exemplo, 2, 3, 5, 7 e outros. Já os *números compostos* ou *secundários* são números que podem ser gerados a partir de outros números, tais como 4 = 2. 2.

Existem muitos teoremas que são utilizados até hoje como base para muitos resultados em *Teoria dos Números* e de métodos para testes de primalidade.

Os números primos no processo de ensino aprendizagem

A construção do conceito de números primos revela que o desenvolvimento da matemática como ciência nem sempre se deu de forma lógica, como geralmente se mostra para os nossos alunos durante o processo de ensino aprendizagem. Na prática ao se trabalhar esses conceitos o professor deve ser conhecedor da história desses números para fazer os discentes compreender o conteúdo.

Vale ressaltar o importante papel da *História da Matemática* em responder aos muitos questionamentos dos alunos. Conclui-se que, a *História da Matemática* dá sentindo ao porquê ensinar e aprender matemática mostrando como as fórmulas matemáticas surgiram e como elas passaram por adaptações ao longo dos anos e que foram criadas a partir da necessidade e tentativas de solucionar problemas concretos.

Nessa concepção todo conhecimento matemático deve ser repassado da melhor forma para que ocorra de fato uma boa aprendizagem. Sendo que todas as questões sobre como reconhecer um número primo, como decompor os números compostos em fatores primos faz parte do processo de desenvolvimento da matemática formuladas em tempos remotos.

Karl Fridrich Gauss escreveu no artigo 329 das *Disquisitiones Arithmeticae* (1801): ''o problema de distinguir números primos de compostos e de decompor esses últimos em seus fatores primos é conhecido como sendo um dos mais importantes e uteis na aritmética. A dignidade da própria ciência parece requerer que todos os meios possíveis sejam explorados para a solução de um problema tão elegante e tão celebrado'' (MARTINEZ; MOREIRA; SALDANHA; TENGAN, 2011).

Portanto, este estudo busca analisar como os conteúdos matemáticos, neste caso, os números primos estão sendo explorados em sala de aula e como o conhecimento matemático está sendo construído pelos alunos, observando o conceito e as propriedades dos números.

Cercada de preconceitos a matemática, tida como vilã por expressiva parte do alunado, e por ser uma área do conhecimento extremamente abstrata, torna-se um grande desafio para o professor quebrar esse preconceito, mostrando com os mais diversos meios que ela é necessária para o desenvolvimento da humanidade, e que apesar do rigor de seus conceitos, axiomas e teoremas ela pode ser divertida.

A construção do conceito matemático no processo de aprendizagem

Sabe-se que a criança entra em contato com os números desde muito cedo, no contexto familiar e social: sua idade, quantidade de membros da família, número da casa e outros.

Esse contato embora informal, é de grande importância, pois oferece condições de familiarização com a ideia de número, e a criança começa a estabelecer suas primeiras hipóteses a respeito do processo de representação de quantidades.

A partir disso cabe aos professores mostrar aos alunos que a matemática não é uma ciência que trata somente de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas ela necessita ser vista como uma ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

Além disso, é importante destacar que o conhecimento das barreiras envolvidas no processo de construção de conceitos é de grande utilidade, uma vez que para que o professor compreenda melhor alguns aspectos da aprendizagem dos alunos são necessários que esteja de acordo com o diz na seguinte citação:

> O conhecimento matemático precisa ser formalizado, necessariamente para ser transformado para se tornar possível de ser ensinado/aprendido; ou seja, a obra e o pensamento do matemático teórico não são possíveis de comunicação direta aos alunos. Essa consideração implica rever a ideia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fiéis dos objetos da ciência. (BRASIL, 1997, p. 35)

Percebe-se mediante pressupostos que num mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessário tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.

A matemática vista dessa forma, tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel importante, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

Em seu papel formativo, ela contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

> A essas concepções da matemática no Ensino Médio se junta à ideia de que, no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto às de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade. (BRASIL/ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO: volume 2, 2006, p.73)

Por fim, cabe à matemática por meio do ensino com experiências apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Sem dúvida, cabe a sua principal função é auxiliar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento.

Preliminares

Nesta seção faz-se uma breve introdução sobre os números naturais e os números inteiros, temas fundamentais para o estudo de números primos.

Números Naturais

Desde os primórdios, a noção de número está ligada aos processos de contar e medir. Atualmente, na nossa educação, o conceito de número é abordado em paralelo ao conceito de conjunto: um número natural é a característica de todos aqueles conjuntos que têm a mesma quantidade de elementos

O nosso ponto de partida é o conjunto dos números naturais, representado por $\mathrm{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\dots\}\mathrm{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\dots\}$, cujos elementos são números naturais e as reticências indicam que a contagem continua indefinidamente.

Para alguns autores, o número 0 (zero) não representa contagem. Por essa razão, eles excluem o número 0 (zero) do conjunto dos números naturais, por mera conveniência.

A introdução do zero no conjunto dos números naturais é relativamente nova na história da matemática. Usa-se $\mathrm{N}^*\mathrm{N}^*$ para representar o conjunto dos números sem o zero, ou seja, $\mathrm{N}^* = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\dots\}\mathrm{N}^* = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\dots\}$.

Números Inteiros

Como os números naturais mostraram-se insuficientes para resolver os problemas do cotidiano. Nos séculos XV e XVI foi desenvolvida uma linguagem padrão para designar perdas, débitos, prejuízos etc.

A terminologia adotada consiste em preceder a quantidade numérica do sinal negativo $(-)(-)$. Assim, uma perda de 5 unidades monetárias é simbolizada por $-5-5$. Estes são os *números inteiros negativos*.

A união dos *números inteiros negativos* com o conjunto dos *números naturais*, resultou no *conjunto dos números inteiros*, representado por $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$, tal que $Z = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}Z = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$, cujos elementos são *números inteiros* e as reticências indicam que a contagem continua indefinidamente.

Divisibilidade

A *divisibilidade* é uma ferramenta fundamental que se usa para verificar se um determinado número é divisível ou não por outro número. A operação de divisão consiste em dividir dois números: *dividendo* (o que está sendo dividido) e o *divisor* (por quantas vezes será dividido), resultando num *quociente* (resultado) e num *resto*.

Quando na divisão o *resultado é exato*, diz-se que os números são divisíveis e o resto da divisão é zero. Porém, quando o *resulta não é exato*, diz-se que os números não são divisíveis e o resto da divisão é diferente de zero. Entretanto, para saber se um número é divisível por outro precisa-se conhecer os *critérios de divisibilidade*.

Exemplo 1: 4 divide 16, pois a divisão de 16 por 4 é exata. De fato, $16 \div 4 = 4$ $16 \div 4 = 4$ com resto 0, ou seja, $16 = 4 \cdot 416 = 4 \cdot 4$. Enquanto 5 não divide 23, pois a divisão de 23 por 5 não é exata. De fato: $23 \div 5 = 23 \div 5 =$ 4 com resto 3, ou seja, $23 = 4 \cdot 5 + 323 = 4 \cdot 5 + 3$.

Critérios de divisibilidade

Um *critério de divisibilidade* é uma regra que permite verificar se um dado número inteiro é ou não divisível por outro número inteiro positivo, sem que seja necessário efetuar a divisão.

Divisibilidade por 2: Um número inteiro é divisível por 2 quando ele termina em 0, 2, 4, 6 ou 8, isto é, quando ele é par.

Exemplo 2: Os números 100, 452, 3256 e 453008 são divisíveis por 2, pois são números pares.

Divisibilidade por 3: *Um número inteiro é divisível por 3 quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é divisível por 3.*

Exemplo 3: O número 132063 é divisível por 3, pois $1+3+2+0+6+3=151+3+2+0+6+3=15$ e $15 \div 3 = 5$ $15 \div 3 = 5$. Isto mostra que o número 132063 é divisível por 3.

Divisibilidade por 4: *Um número inteiro é divisível por 4 quando os dois últimos algarismos formam um número divisível por 4.*

Exemplo 4: O número 425167828 é divisível por 4. De fato, como o número 28 são os dois últimos algarismos do número 425167828 e $28 \div 4 = 728 \div 4 = 7$ com resto 0, então 425167828 é divisível por 4.

Observação 1: Para saber o resto da divisão de um número inteiro dividido por 4, basta calcular o resto da divisão dos dois últimos algarismos por 4.

Exemplo 5: Para calcular o resto da divisão do número 1251677471 por 4, basta calcular o resto da divisão de 71 por 4, ou seja, $71 \div 4 = 771 \div 4 = 7$ com resto 3.

Divisibilidade por 5: *Um número inteiro é divisível por 5 quando o último algarismo for 0 ou 5.*

Exemplo 6: Os números 2240 e 7192145 são divisíveis por 5, pois terminam respectivamente, em 0 e 5.

Observação 2: para saber o resto da divisão de um número inteiro por 5, basta calcular o resto da divisão do seu último algarismo por 5.

Exemplo 7: Para calcular o resto da divisão do número 12839 por 5, basta calcular o resto da divisão do número 9 por 5, ou seja, $9 \div 5 = 19 \div 5 = 1$ com 4.

Divisibilidade por 6: *um número inteiro é divisível por 6 quando é divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo.*

Exemplo 8: 8412 é divisível por 6. De fato, 8412 é divisível por 2, pois é par. Como 8 + 4 + 1 + 2 = 15 e 15 é divisível por 3, então 8412 é divisível por 3. Portanto, 8412 é divisível por 6, pois é divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo.

Divisibilidade por 7: *Um número inteiro é divisível por 7 quando a diferença entre o dobro do último algarismo e o número formado pelos demais algarismos resulta num número divisível por 7.*

Exemplo 9: O número 41909 é divisível por 7.

Justificativa: será feita passo a passo.

Passo 1: Calcular o dobro do último algarismo do número 41909, ou seja, $2 \cdot 9 = 2 \cdot 9 =$ 18. Em seguida, calcular $4190 - 18 = 41724190 - 18 = 4172$.

Passo 2: Calcular o dobro do último algarismo do número 4172, ou seja, $2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 =$ 4. Em seguida, calcular $417 - 4 = 413417 - 4 = 413$.

Passo 3: Calcular o dobro do último algarismo do número 413, ou seja, $2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 =$ 6. Em seguida, calcular $41 - 6 = 3541 - 6 = 35$.

Como $35 \div 7 = 535 \div 7 = 5$ que é uma divisão exata, então o número 41909 é divisível por 7.

Divisibilidade por 8: *Um número inteiro é divisível por 8 quando os seus três últimos algarismos formam um número divisível por 8.*

Exemplo 10: O número 39736 é divisível por 8, pois o número $736 = 8 \cdot 92$ $736 = 8 \cdot 92$. Enquanto o número 878162 não é divisível por 8, pois o número 162 não é divisível por 8.

Observação 3: As potências de 10, a partir de 1000, são todas divisíveis por 8. Porém, 10 e 100 não são divisíveis por 8. Por exemplo: $1000 = 8 \cdot 1251000 = 8 \cdot 125$, $10000 = 8 \cdot 125010000 = 8 \cdot 1250$ e $1000000 = 8 \times 125000$ $1000000 = 8 \times 125000$.

Observação 4: para saber o resto da divisão de um número inteiro por 8, basta calcular o resto da divisão dos três últimos algarismos por 8.

Exemplo 11: para calcular o resto da divisão do número 218576436 por 8, basta calcular o resto da divisão do número 436 por 8, ou seja, $436 \div 8 = 54436 \div 8 = 54$ com resto 4.

Divisibilidade por 9: *Um número inteiro é divisível por 9 quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos forma um número divisível por 9.*

Exemplo 12: O número 32697 é divisível por 9, pois $3 + 2 + 6 + 9 + 7 = 27$ $3 + 2 + 6 + 9 + 7 = 27$ e como $27 \div 9 = 327 \div 9 = 3$, então 32697 é divisível por 9.

Divisibilidade por 10: *Um número inteiro é divisível por 10 quando o último algarismo for 0.*

Exemple 13: O número 582690 é divisível por 10, pois termina em 0.

Divisibilidade por 11: *Um número inteiro é divisível por 11 quando a diferença entre a soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos algarismos de ordem par for igual a 0 ou 11.*

Exemplo 14: O número 632610 é divisível por 11, pois se $6 + 2 + 1 = 9$ $6 + 2 + 1 = 9$ é a soma dos algarismos de ordem ímpar $(SI)(SI)$ e $3 + 6 + 0 = 9$ $3 + 6 + 0 = 9$ é a soma dos algarismos de ordem par $(SP)(SP)$ então $SI - SP = 9 - 9 = 0SI - SP = 9 - 9 = 0$.

Divisibilidade por 12: *Um número inteiro é divisível por 12 quando ele é divisível por 3 e por 4 ao mesmo tempo.*

Exemplo 15: O número 7320 é divisível por 12. De fato, como $7 + 3 + 2 + 0 = 12$ $7 + 3 + 2 + 0 = 12$ e 12 é divisível por 3, então 7320 é divisível por 3.

Note que 20 são os dois últimos algarismos e 20 é divisível por 4. Logo, 7320 é divisível por 4.

Portanto, 7320 é divisível por 12 pois é divisível por 3 e por 4 ao mesmo tempo.

Divisibilidade por 15: *Um número inteiro é divisível por 15 quando ele é divisível por 3 e por 5 ao mesmo tempo.*

Exemplo 16: O número 4362105 é divisível por 15. De fato, como $4 + 3 + 6 + 2 + 1 + 0 + 5 = 214 + 3 + 6 + 2 + 1 + 0 + 5 = 21$ e 21 é divisível por 3, então 4362105 é divisível por 3. Também é divisível por 5, pois termina em 5. Portanto, 4362105 é divisível por 15 pois é divisível por 3 e por 5 ao mesmo tempo.

Números primos e números compostos

Nesta seção apresentam-se os conceitos de *múltiplos* e *divisores*, os quais, também, chamam-se *fatores*.

Definição 1: *Um número inteiro positivo p chama-se número primo quando os seus únicos divisores são o número 1 e ele mesmo.*

A Definição 1 nos diz que todo número primo de números inteiros positivos possui apenas dois divisores.

Exemplo 17: os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19 são primos, pois os seus únicos divisores são, o número 1 e ele mesmo.

Observação 5: o número 2 é o único número primo par.

Reconhecimento de um número primo

Para verificar se um número é primo ou não, deve-se dividir o número a ser verificado pelos números primos $\{2, 3, 5, 7,\ 11,\ 13, 17, 19, 23, \dots\}\{2, 3, 5, 7,\ 11,\ 13, 17, 19, 23, \dots\}$, nessa ordem, até obter uma divisão com resto zero ou uma divisão com quociente menor do que o divisor e o resto diferente de zero. No caso da divisão com resto zero, o *número é não primo*. Caso contrário, o *número é primo*.

Exemplo 18: Verificar se 247 é primo ou não.

Verificação: divide-se o número 247 pelos números primos $\{2, 3, 5, 7,\ 11,\ 13, \dots\}$ $\{2, 3, 5, 7,\ 11,\ 13, \dots\}$, nessa ordem, até obter uma divisão com resto zero ou uma divisão com quociente menor do que o divisor e o resto diferente de zero. Então,

247 não é divisível por 2, pois não é um número par.

2 + 4 + 7 = 13 e 13 não é divisível por 3, logo 247 não é divisível por 3.

247 não é divisível por 5, pois não termina com 0 nem com 5.

247 não é divisível por 7, pois $247 \div 7 = 35247 \div 7 = 35$ com resto 2. Note que o quociente 35 é maior do que o divisor 7 e o resto é diferente de zero.

247 não é divisível por 11, pois $247 \div 11 = 11247 \div 11 = 11$ com resto 5. Note que o quociente 22 é maior do que o divisor 11 e o resto é diferente de zero.

247 é divisível por 13, pois $247 \div 13 = 19247 \div 13 = 19$ com resto 0.

Como 247 dividido por 13 tem quociente 19 com resto 0, então 247 é um número não primo.

Decomposição de um número composto em fatores primos

Definição 2: *Um número inteiro positivo p chama-se número composto quando ele pode ser decomposto num produto de dois ou mais fatores primos não necessariamente distintos.*

Exemplo 9 Os números 12 e 210 são números compostos, pois $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ ou $12 = 2^2 \cdot 312 = 2^2 \cdot 3$ e $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Nota 1: Todo número inteiro não primo é um **número composto**.

Todo número inteiro positivo, maior do que 1, pode ser decomposto num produto de dois ou mais fatores primos. Tal decomposição chama-se *fatoração*.

Dispositivo prático para fatoração de um número inteiro positivo composto
Para fatorar um número inteiro positivo composto, deve-se seguir os passos abaixo. **Passo 1:** traçar uma linha vertical à direita do número dado. **Passo 2:** dividir o número dado pelo seu menor divisor primo e escrevê-lo à direita da linha vertical. **Passo 3:** dividir o quociente obtido no passo 2 pelo seu menor divisor primo e escrevê-lo à direita da linha vertical. **Passo 4:** dividir o quociente obtido no passo 3 pelo seu menor divisor primo e escrevê-lo à direita da linha vertical. De modo análogo, seguimos conforme os passos acima até obter o quociente 1.

Exemplo 20: Usando o dispositivo prático para fatoração do número 520 em fatores primos, tem-se

$$
\begin{array}{r|l}
520 & 2 \\
260 & 2 \\
130 & 2 \\
65 & 5 \\
13 & 13 \\
1 &
\end{array}
$$

Logo, $520 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13520 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13$.

Quantidade de divisores de um número composto

Para calcular a quantidade de divisores de um número inteiro positivo composto, fatora-se o número e faz-se o produto de cada expoente acrescido de uma unidade.

Exemplo 21 Usando o dispositivo prático para fatoração do número 450 em fatores primos, tem-se

$$
\begin{array}{r|l}
450 & 2 \\
225 & 3 \\
75 & 3 \\
25 & 5 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
$$

Logo, $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

Note que $\begin{cases} 1 \text{ é } o\ expoente\ do\ fator\ 2 \Rightarrow 1+1=2 \\ 2 \text{ é } o\ expoente\ do\ fator\ 3 \Rightarrow 2+1=3 \\ 2 \text{ é } o\ expoente\ do\ fator\ 5 \Rightarrow 2+1=3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 1 \text{ é } o\ expoente\ do\ fator\ 2 \Rightarrow 1+1=2 \\ 2 \text{ é } o\ expoente\ do\ fator\ 3 \Rightarrow 2+1=3 \\ 2 \text{ é } o\ expoente\ do\ fator\ 5 \Rightarrow 2+1=3 \end{cases}$$

Portanto, o número de divisores do número 450 é igual a $2 \cdot 3 \cdot 3 = 182 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, ou seja, o número 450 possui18 divisores.

Conjunto dos divisores de um número composto

Nesta seção mostra-se como encontrar o conjunto dos divisores de um número inteiro positivo composto.

Dispositivo prático para encontrar o conjunto dos divisores de um número composto

Para encontrar o conjunto dos divisores de um número inteiro positivo composto, que é finito, deve-se seguir os passos abaixo.

Passo 1: decompor o número composto em fatores primos.

Passo 2: traçar uma linha vertical à direita dos fatores primos e escrever o número 1 acima do 1º fator primo.

Passo 3: multiplicar os fatores primos pelos números acimas da coluna da direita, escrevendo o resultado à direita sem os repetir.

Os divisores já obtidos não precisam ser repetidos.

Exemplo 22: Encontre o conjunto dos divisores do número 450.
Resolução: será feita passo a passo, conforme a seguir.
Passo 1: decompor o número 450 em fatores primos.

450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

Passo 2: traçar uma linha vertical à direita dos fatores primos e escrever o número 1 acima do 1º fator primo.

		1
450	2	
225	3	
75	3	
25	5	
5	5	
1		

Passo 3: multiplicar os fatores primos pelos números acimas da coluna da direita, escrevendo o resultado à direita sem os repetir.

		1
450	2	2
225	3	3, 6
75	3	9. 18
25	5	5, 10, 15, 30, 45, 90
5	5	25, 50, 75. 150, 225, 450
1		

Logo,

$$D(450) = \{1,2,3,5,6,9,10,15,18,25,30,45,50,75,90,150,225,450\}$$

$$D(450) = \{1,2,3,5,6,9,10,15,18,25,30,45,50,75,90,150,225,450\}.$$

Máximo Divisor Comum

Nesta seção é exibido o *máximo divisor comum* de números inteiros positivos compostos.

Definição 3 *Chama-se máximo divisor comum entre dois ou mais números inteiros positivos compostos, denotado por mdc, o maior divisor comum entre esses números.*

Noutras palavras: O *mdc* entre dois ou mais números positivos composto é o maior divisor presente na interseção dos conjuntos dos divisores desses números.

Exemplo 23: Calcule o mdc entre os números 20 e 40. A resolução será feita passo a passo.

Passo 1: Calcular o mdc. entre os números 20 e 40.

Decompondo os números 20 e 40 em fatores primos, respectivamente, tem-se

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

- Traçando uma linha vertical à direita dos fatores primos de 20 e 40, respectivamente, e escrever o número 1 acima do 1º fator primo, obtém-se.

$$\begin{array}{r|l|l} & & 1 \\ 20 & 2 & \\ 10 & 2 & \\ 5 & 5 & \\ 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l|l} & & 1 \\ 40 & 2 & \\ 20 & 2 & \\ 10 & 2 & \\ 5 & 5 & \\ 1 & & \end{array}$$

Por fim, multiplicando os fatores primos dos números 20 e 40, respectivamente, pelos números acima da coluna da direita, escrevendo o resultado à direita sem os repetir, resultam

		1
20	2	2
10	2	4
5	5	5, 10, 20
1		

		1
40	2	2
20	2	4
10	2	8
5	5	5, 10, 20, 40
1		

Logo,

$D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ e $D(40) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}D(40) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$

Passo 2: Calcular a interseção entre os divisores de 20 e 40.

$$D(20) \cap D(40) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\} \cap \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

$$D(20) \cap D(40) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\} \cap \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

.

Como o maior divisor presente em $D(20) \cap D(40) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ $D(20) \cap D(40) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, então o $\text{mdc}(20, 40) = 20(20, 40) = 20$.

Propriedades do Máximo Divisor Comum

Propriedade 1: *O mdc entre dois ou mais números, quando fatorados é o produto dos fatores comuns a eles, cada um elevado ao menor expoente.*

Exemplo 24: Calcule o mdc entre os números 36, 84 e 90. Decompondo os números 36, 84 e 90, respectivamente, em fatores primos, obtém-se

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Logo, $36 = 2^2 \cdot 3^2 36 = 2^2 \cdot 3^2$, $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 784 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ e $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 590 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Observe que os divisores comuns dos números 36, 84 e 90 são 2 e 3. Como o menor expoente de 2 é 1 e o menor expoente de 3 é 1, então o mdc entre 36, 84 e 90 é igual a $2 \cdot 3 = 6$ $2 \cdot 3 = 6$.

Propriedade 2: *Dois ou mais números são primos entre si quando o máximo divisor comum entre eles é o número 1.*

Exemplo 25: Os números 17 e 30 são primos entre si, pois $17 = 17 \cdot 117 = 17 \cdot 1$ e $30 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 530 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Logo, os seus únicos fatores em comum é o número 1.

Propriedade 3: *Dados dois ou mais números, se um deles é divisor de todos os outros, então ele é o mdc dos números dados.*

$$
\begin{array}{r|l}
378 & 2 \\
189 & 3 \\
63 & 3 \\
21 & 3 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
420 & 2 \\
210 & 2 \\
105 & 3 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
$$

Exemplo 26: o número 21 é o mdc entre os números 21, 378 e 420. De fato, sejam seja $21 = 3 \cdot 721 = 3 \cdot 7$. Decompondo os números 378 e 420, respectivamente, em fatores primos, obtém-se

Logo, $21 = 3 \cdot 721 = 3 \cdot 7$, $378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$ e $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Observe que os divisores comuns dos números 21, 378 e 420 são 3 e 7. Como o menor expoente de 3 é 1 e o menor expoente de 7 é 1, então o mdc entre os números 21, 378 e 420 é igual a $3 \cdot 7 = 213 \cdot 7 = 21$.

Algoritmo de Euclides

O *Algoritmo de Euclides* é um processo de divisões sucessivas para calcular o mdc. Neste processo efetua-se várias divisões até chegar a uma divisão exata.

Algoritmo de Euclides

Para calcular o mdc entre dois ou mais números usando *Algoritmo de Euclides*, deve-se seguir os passos abaixo.

Passo 1: dividir o maior número pelo menor número.

Passo 2: dividir o divisor do passo 1 pelo resto da divisão do passo 1.

Passo 3: dividir o divisor do passo 2 pelo resto da divisão do passo 2. Os divisores já obtidos não precisam ser repetidos.

Passo 4: dividir o divisor do passo 3 pelo resto da divisão do passo 3.

De modo análogo, segue-se conforme os passos acima até obter uma divisão exata. O mdc entre os números dados é o divisor da divisão exata.

Exemplo 27: Calculando o mdc entre os números 49 e 84, usando o Algoritmo de Euclides abaixo, obtém-se

	Passo 1	Passo 2	Passo 3	Passo 4
Quociente →	1	1	2	2
84	49	35	14	7
Resto →	35	14	7	0

Como o número 7 é o divisor da divisão exata, então o $mdc(49,94) = 7$ $mdc(49,94) = 7$.

Mínimo múltiplo comum

Nesta Seção é estudado o *Mínimo Múltiplo Comum* entre dois mais números naturais compostos, que é outra utilização da decomposição em números primos.

Definição 4: *Sejam aa e bb dois números naturais, com $b \neq 0b \neq 0$. O número aa chama-se Múltiplo de b b, quando aa é divisível por bb.*

Denota-se o conjunto dos múltiplos do número aa por $M(a)M(a)$.

Observações: Todo número natural tem infinitos múltiplos; zero é múltiplo de qualquer número; os múltiplos de um número são calculados multiplicando-se esse número por cada elemento do conjunto dos números naturais.

Exemplo 28: Calcular os múltiplos do número 2 e 5.

Resolução: multiplicando os números 2 e 5, respectivamente, por cada elemento do conjunto, resulta

- $M(2) = \{2 \cdot 0,\ 2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 2 \cdot 5, 2 \cdot 6, \ldots\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$
  $M(2) = \{2 \cdot 0,\ 2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 2 \cdot 5, 2 \cdot 6, \ldots\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$
- $M(2) = \{5 \cdot 0,\ 5 \cdot 1, 5 \cdot 2, 5 \cdot 3, 5 \cdot 4, 5 \cdot 5, 5 \cdot 6, \ldots\} = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$
  $M(2) = \{5 \cdot 0,\ 5 \cdot 1, 5 \cdot 2, 5 \cdot 3, 5 \cdot 4, 5 \cdot 5, 5 \cdot 6, \ldots\} = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots\}$

Processo para calcular o mínimo múltiplo comum

Utiliza-se a fatoração para calcular o *Mínimo Múltiplo Comum* entre dois ou mais números inteiros positivos.

Definição 5*: Chama-se Mínimo Múltiplo Comum entre dois ou mais números diferentes de zero, denotado por mmc, o menor múltiplo comum entre esses números.*

Noutras palavras: um número mm é o *Mínimo Múltiplo Comum* entre os números não nulos aa e bb, denotado por $mmc(a,b) = mmmc(a,b) = m$, quando ele satisfaz as seguintes condições:

$m > 0m > 0$; mm é divisível por aa e por bb; se existe um número inteiro positivo $c > 0c > 0$ tal que cc é divisível por aa e por bb, então $m \leq 0m \leq 0$.

O processo para calcular o mínimo múltiplo comum entre dois ou mais números naturais, diferentes de zero, é efetuado do seguinte modo:

Decomposição separada dos números em fatores primos
Neste caso, o mmc é o produto dos fatores primos comuns e não comuns a eles, cada um elevado ao maior expoente.

Exemplo 29: Calcule o mínimo múltiplo comum entre os números 15, 18 e 84.

Resolução: seja $15 = 3 \cdot 515 = 3 \cdot 5$. Decompondo os números 18 e 84, respectivamente, em fatores primos, obtém-se

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, $15 = 3 \cdot 515 = 3 \cdot 5$, $18 = 2 \cdot 3^2 18 = 2 \cdot 3^2$ e $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$.

Observe que os números 2, 3, 5, e 7 são os fatores comuns e não comuns na decomposição dos números 15, 18 e 84. Como a maior potência de 2 é 2, de 3 é 2, de 5 é 1 e de 7 é 1. Então, $mmc(15,18,24) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$ $mmc(15,18,24) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$.

Decomposição simultânea dos números em fatores primos
Neste caso, todos os números são decompostos em fatores primos ao mesmo tempo e o mmc é o produto desses fatores comuns e não comuns a eles.

Exemplo 30: Calcule o mmc entre os números 18, 45 e 105.

Resolução: Decompondo os números 18, 45 e 105, simultaneamente, em fatores primos, obtém-se

$$
\begin{array}{r|l}
18,\ 45,\ 105 & 2 \\
9,\ 45,\ 105 & 3 \\
3,\ 15,\ 35 & 3 \\
1,\ 5,\ 35 & 5 \\
1,\ 1,\ 7 & 7 \\
1,\ 1,\ 1 &
\end{array}
$$

Portanto,

$mmc(18,45,105) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 630$

$mmc(18,45,105) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 630.$

Propriedades do mínimo múltiplo comum

Propriedade 4*:* *dados dois ou mais números inteiros positivos, se um deles é múltiplo de todos os outros, então ele é o mmc entre eles.*

Exemplo 31: O número 81 é o mmc entre os números 9, 27 e 81, pois 81 é múltiplo de 9 e de 27. De fato, decompondo os números 9, 27 e 81, simultaneamente, em fatores primos, obtém-se

$$
\begin{array}{r|l}
9,\ 27,\ 81 & 3 \\
3,\ 9,\ 27 & 3 \\
1,\ 3,\ 9 & 3 \\
1,\ 1,\ 3 & 3 \\
1,\ 1,\ 1 &
\end{array}
$$

Logo, $mmc(9,27,81) = 3^4 = 81$$mmc(9,27,81) = 3^4 = 81.$

Propriedade 5: *o mmc entre dois ou mais números primos entre si é o produto entre eles.*

Exemplo 32: Como os números 2, 7 e 13 são primos entre si, ou seja, eles têm somente o número 1 como divisor comum, então $mmc(2,7,13) = 2 \cdot 7 \cdot 13 = 182$ $mmc(2,7,13) = 2 \cdot 7 \cdot 13 = 182.$

Considerações Finais

Este artigo nos revela o fascínio provocado pelos números primos em acadêmicos ao longo de toda a história da matemática. Este fascínio não é um acaso, como visto, trata-se de um tema profundamente complexo e instigante que vem desafiando a comunidade científica há séculos. Sua aplicação em criptografia RSA, que viabiliza diariamente milhares de transações financeiras via internet, torna o tema ainda mais discutido em diversos campos de estudo e com os mais diversos interesses, incluindo desde aqueles que buscam garantir e aprimorar a segurança do sistema, como os que buscam suas fragilidades para uso menos nobres.

Diante de sua complexidade, o tema é abordado de forma superficial tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior de matemática. O que é plenamente compreendido pela necessidade de conhecimento de matemática avançada para maior aprofundamento. Entretanto, a literatura já registra algumas tentativas de simplificar o tema de forma a torná-lo compreensível a alunos com poucos ou nenhum conhecimento de matemática avançada, sendo por tanto, um tema bastante interessante para futuros trabalhos de monografia para professores de matemática.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática 5ª a 8ª série. Brasília, 1998.

COUTINHO, Severino Coullier**. Números inteiros e criptografia RSA**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. 226 p.

EUCLIDES, Alexandria. **Os elementos:** tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FONSECA, R. V. **O conhecimento sobre números primos**: uma investigação entre estudantes de licenciatura em matemática. 2015. 154 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica,
São Paulo, 2015.

MACHADO, S. D. A.; MARANHÃO, M. C.; COELHO, S. P. **Como é utilizado o teorema fundamental da aritmética por atores do ensino fundamental**. In: Congreso Iberomericano de Educíon Matemática, 2005.

MARTINEZ, Fábio Brochero; MOREIRA, Carlos Gustavo; SALDANHA, Nicolau; TENGAN, Eduardo. **Teoria dos números:** um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

MOTA, Karla Valéria Caldas. **O mistério e a beleza dos números primos.** Universidade Federal de Goiás. Goiânia 2017.

OLIVEIRA, Naysa Crystine Nogueira. **Como reconhecer os números primos**. Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/como-reconhecer-os-numeros-primos.htm>. Acesso: 25 de maio de 2019.

OLIVEIRA, Gerson Pastre; FONSECA, Rubens Vilhena. **A teoria dos números na formação de professores de matemática.** In: compreensões acerca da primalidade e do Teorema Fundamental da Aritmética. Bauru, SP, 2017.

RESENDE, M. R. **Re-significando a disciplina teoria dos números na formação do professor de matemática na licenciatura.** 2007. 281 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

SANTOS, Artur Silva. **Matemática I**. [S.I.]. São Luís, 2018.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Números primos**. Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/numeros-primos.htm>. Acesso: 25 de maio de 2019.

STEWART, Ian. **O fantástico mundo dos números**: a matemática do zero ao infinito: tradução George Schlesinger. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.
VICENTINO, C. **História Geral**. São Paulo: Scipione, 1997.

ZAZKIS, R.; CAMPBELL. S. R. **Prime decomposition**: understanding uniqueness. Journal of Mathematical Behavior, Kidlington, v.15, n. 2, p. 207-218, 1996.

ZAZKIS, R. (Ed.). **Learning and teaching number theory**: research in cognition and instruction. Westport: Ablex Publishing, 2002. p. 83-96. (Monograph serie of the Journal of Mathematics Behavior, v. 2).

Recebido em 27 de agosto de 2020.
Aceito em 15 de setembro de 2020.