UMA ABORDAGEM SOBRE O TEOREMA DE TALES

AN APPROACH ABOUT THE TALES THEOREM

Clemilton da Cruz Holanda 1
Jairo Santos da Silva 2

Resumo: Este artigo tem por objetivo apresentar o teorema de Tales, algumas de suas aplicações e consequências, e discutir sobre sua aplicabilidade em sala de aula. A metodologia aplicada nessa investigação foi a pesquisa de revisão bibliográfica, de natureza qualitativa, e o material utilizado para a fundamentação teórica, encontra-se em base de dados como Scielo, Capes, sites de várias Universidades, além de material impresso, artigos, dissertações, teses, revistas e outros periódicos, apresentados no idioma Português, compreendidos no período dos últimos dez anos, salvo alguns clássicos que foram encontrados e usados. Esse material foi selecionado, obedecendo a critérios basilares como validade, credibilidade e coerência com o objetivo da pesquisa. Com base no aporte teórico apresentado, estabeleceu-se um amadurecimento sobre algumas concepções que podem ser levadas à sala de aula com intuito de melhorar o desempenho no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos relacionados ao teorema de Tales.

Palavras – chave: Geometria, teorema de Tales, aplicações.

Abstract: This paper aims to present the Tales theorem, some of its applications and consequences, and to discuss its applicability in the classroom. The methodology applied in this investigation was the literature review research, of a qualitative nature, and the material used for the theoretical foundation, is found in databases such as Scielo, Capes, websites of various Universities, in addition to printed material, articles, dissertations, theses, magazines and other periodicals, presented in the Portuguese language, included in the period of the last ten years, except for some classics that were found and used. This material was selected, obeying basic criteria such as validity, credibility and consistency with the research objective. Based on the theoretical contribution presented, a maturity was established about some conceptions that can be taken to the classroom in order to improve performance in the process of teaching and learning content related to the Tales theorem.

Keywords: Geometry, Tales theorem, applications.

1-Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Maranhão, polo de Santa Luzia, vinculado ao Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica/PARFOR. Atualmente é Professor da Prefeitura Municipal de Santa Luzia – MA. LATTES: http://lattes.cnpq.br/9632182076835710. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9649-6949.

2-Possui Graduação em Matemática (Licenciatura) pela Universidade Federal do Maranhão (2007), Mestrado em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (2009) e Doutorado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (2017). Atualmente é Professor Adjunto III do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Maranhão (Campus de São Luís) com atuação na graduação e na pós graduação em Matemática (mestrado acadêmico e mestrado profissional – PROFMAT). LATTES: http://lattes.cnpq.br/5545833756032482 . ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9068-0270

Introdução

O estudo da Geometria e o reconhecimento de sua importância, é indispensável ao desenvolvimento do aprendizado do aluno como processo de conhecimento, porque ajuda e valoriza o descobrir, o comparar e o experimentar, bem como o identificar das formas geométricas nos objetos existentes nesse imenso universo ao seu redor.

Dentre os muitos resultados da Geometria, surge, em particular, o conhecido teorema de Tales e suas aplicações em diversos problemas e exercícios na vida acadêmica dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Esses alunos, por vezes, ao se depararem com este teorema e alguns conceitos, conteúdos e situações problema associados a ele, apresentam algumas dificuldades de assimilação e aplicação destes conteúdos, o que motivou o interesse em desenvolver esta pesquisa.

As dificuldades apresentadas pelos alunos, relativa ao teorema de Tales, colocam o professor diante de um enorme desafio na elaboração de estratégias e metodologias inovadoras para ensinar este conteúdo de maneira prática, concreta e científica, de forma que explicite por meio do contexto dia a dia, com significado e aplicabilidade ao mesmo tempo, a fim de facilitar a compreensão desse tão importante teorema da Geometria.

Nessa perspectiva, o objetivo desse trabalho é, justamente, ajudar esses alunos, e demais interessados, na compreensão deste teorema, assim como auxiliá-los a reparar parte do que não conseguiram aprender ao longo dos anos anteriores, quando são apresentadas as primeiras noções acerca do teorema de Tales e conteúdos afins. Precisamente, este artigo tem como objetivo geral apresentar o teorema de Tales e algumas de suas aplicações, bem como resolver alguns problemas relacionados a este teorema, além de outros conteúdos afins, contribuindo assim para a consolidação da aprendizagem desta temática.

A metodologia aplicada nesta pesquisa se fundamentou basicamente na pesquisa bibliográfica, de natureza qualitativa, com base no método dedutivo, que segundo Fachin (2017), parte das teorias aos fatos, como se pode observar no percurso desse texto, partindo-se dos fundamentos aqui assentados para a opinião prática do pesquisador.

Foi aplicado também o método de observação na prática, onde utilizou-se do conhecimento prévio da realidade na escola sobre o ensino e aprendizagem da Matemática e, em especial, da Geometria e do teorema de Tales, que muitas vezes nem sempre são bem dominados.

No percurso metodológico desta pesquisa, foi feito uma seleção de artigos, livros impressos, e sites da internet nessa área, onde se extraiu as informações interessantes da temática, no idioma português, no período dos últimos dez anos, salvo alguns clássicos que foram encontrados e usados.

Os critérios de seleção dos conteúdos basilares desta pesquisa, obedeceram à essência do tema, a validade, a coerência com os objetivos, a relevância para sua elaboração, assim como a facilidade também de compreensão e interpretação, no sentido de auxiliar igualmente a apresentação final e importância na área educacional.

O presente artigo foi dividido em três seções descritas como segue.

Na primeira seção é apresentado um breve panorama sobre a importância da Matemática e, em particular, da Geometria na vida de todo indivíduo. Aqui, serão expostas algumas concepções de teóricos da área sobre tal importância e, além disso, serão exibidas algumas recomendações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sobre o ensino da Matemática e da Geometria.

A segunda seção é dedicada a um breve histórico sobre o teorema de Tales. Aqui, encontra-se repostas a perguntas como: quem foi Tales de Mileto? o que é o teorema de Tales? Além disso, também serão apresentadas algumas consequências e aplicações desse teorema.

Finalmente, na terceira seção, apresenta-se algumas sugestões didáticas para serem aplicadas pelo professor de Matemática, na sua prática cotidiana, com relação ao reconhecimento e compreensão do teorema de Tales. O propósito desta seção é facilitar o trabalho do professor com seus alunos em sua sala de aula.

Importância do ensino da Matemática e da Geometria

Para Almeida (2006), quando se pensa em Matemática, de modo geral, compreende-se que esta área do conhecimento está sempre relacionada de alguma maneira com o cotidiano de qualquer pessoa, independente de grau de formação, nível de saber e de experiência, classe social, profissão e outros aspectos. Ela está presente em toda ação humana, e é tão importante, que é quase impossível viver sem ela. Por vezes ela aparece de forma explícita e em outras vezes de forma sutil.

São diversas as situações em que a Matemática aparece, seja em uma simples tarefa de ir ao supermercado fazer compras ou ir a uma farmácia comprar um medicamento, ou fazer um projeto de construção de uma casa, e tantas outras situações problema em que o indivíduo se depara, ali está presente esta ciência.

No âmbito escolar, estudar Matemática representa aprender uma linguagem específica apta para traduzir a realidade e conhecer as diferenças e suas aplicações em variados contextos. E no que se refere ao ensino da Matemática, Almeida (2006) menciona que:

> Os métodos de ensino e o currículo escolar devem atender às necessidades dos alunos, estando de acordo com a realidade por eles vivida. A disciplina pode estar mais ligada a questões do cotidiano para que possa fazer sentido ao aluno e este se sinta mais motivado em aprender e lidar com problemas enfrentados habitualmente. (ALMEIDA, 2006, p.10)

Dessa forma, é necessário que o professor de Matemática, em seu dia a dia, relacione o que está ensinando com o que seus alunos vivem, porque se não for assim, seu método de ensino-aprendizagem pode ser falho e os conteúdos matemáticos podem se tornar cada vez mais difíceis.

Nos dias atuais, o aluno vem descobrindo novas maneiras de aprender a Matemática, e o avanço tecnológico tem permitido alternativas de ensinar essa disciplina na prática pedagógica, de modo que acaba por trazer inovação e comodidade aqueles que a utilizam no dia a dia. Entretanto, o ensino dessa disciplina deve ser trabalhado de forma articulada, com números e operações, com a geometria, funções, análise de dados, probabilidades, entre outros tópicos, a fim de que o aluno perceba que existem relações entre a maioria destes temas.

Em se tratando da Geometria, que concentra o tema principal dessa pesquisa, os PCN's (1997) mencionam que esta deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas, como é o caso do teorema de Tales. Além disso, com respeito à Geometria, os PCN's também ressaltam que:

> Existe uma infinidade de problemas que devem ser trazidos para resolução em sala de aula. O professor pode estimular seus alunos a resolver questões bem práticas como: calcular a distância de um ponto no solo até o topo de um poste de iluminação; calcular a medida da diagonal do piso da sala de aula; calcular o tamanho mínimo de uma escada usada para atingir o telhado de um prédio (PCN's, 1997, p. 166).

Para que o aprendizado em Geometria e, mais geralmente, em Matemática, atinja o maior número possível de alunos em uma sala de aula de forma proveitosa e se consolide com o máximo de sentido e significado, torna-se necessário que o professor utilize de estratégias diversificadas no intuito de tentar atender, na medida do possível, as especificidades de cada aluno, seus níveis de maturidade, limites e suas deficiências. Assim sendo, vale lembrar que:

> O "insucesso" de alguns alunos e alunas na aprendizagem da Geometria parece estar diretamente ligado à insuficiênciade

base em assuntos anteriores o que leva mais uma vez, a questão da contextualização: se o/a aluno/a não consegue relacionar a informação recebida com algo real, fica difícil esta chegar a ser construída cognitivamente (FERNANDES et al, 2009, p. 2).

Outra parte de grande relevância no contexto do ensino da Geometria é o fato de que este pode ser realizado a partir do próprio ambiente onde se vive, já que nele podemos encontrar as mais diversas formas em objetos que caracterizam os conteúdos geométricos. Reafirmando a importância do ensino da Matemática, a Geometria pode perfeitamente demonstrar o que é abstrato em real onde o aluno pode ver seu significado (MENDES, 2009).

O ensino da Geometria seguindo a nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC), foca no desenvolvimento das habilidades e competências dos alunos, bem como enfatiza também aqueles alunos portadores de algumas limitações devido às dificuldades de aprendizagem. E, nesse intuito, a BNCC atual, nos remete a grande importância relacionada ao contexto onde o aluno se insere, considerando que ao seu redor a Matemática está presente em cada objeto próximo do aluno, tudo tem uma forma, um conteúdo, uma essência, ocupa um espaço, é formado por um tipo de linha, entre outros aspectos típicos da Geometria.

Convém anotar duas importantes habilidades apontadas pela BNCC relativas ao estudo da parte da Geometria que é o foco dessa pesquisa, isto é, o teorema de Tales, são elas:

> Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal e resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Tales ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes (BNCC, 2017, p.185).

Com o novo molde da Base Nacional Comum Curricular, atualizada e dentro da atual conjuntura, pode ser observado que até os velhos verbos empregados na elaboração dos objetivos, como identificar ou reconhecer, a postura de hoje é outra. Observa-se que agora os verbos são mais ativos onde o foco é a interação do aluno, deixando-o responder e analisar os conteúdos propostos pelo professor, e ali vai aprender a pensar para saber interpretar as diversas situações de aprendizagem (BNCC, 2017).

Um breve histórico sobre o teorema de Tales

Inicia-se esta seção falando um pouco da figura histórica de Tales de Mileto e, em seguida, dar-se-á destaque ao seu famoso teorema que já era estudado, mesmo que indiretamente, desde os tempos antigos.

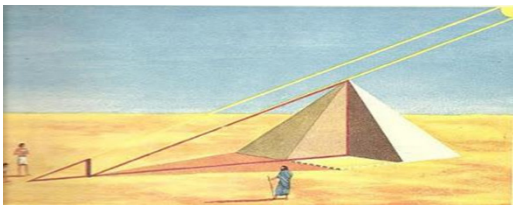
Quem foi Tales de Mileto?

Segundo Almeida (2006), Tales de Mileto, da era pré-socrática, descendente de fenícios, foi um destacado filósofo, astrônomo e matemático, nascido na Grécia, por volta do ano 624 a.C. - 558 a.C. Tales utilizou em seus estudos, os conhecimentos que sabia acerca de Geometria e proporcionalidade cujo objetivo foi determinar a altura de uma dada pirâmide.

Bezerra (2019) menciona que o grande pensador e matemático gostava muito de viajar, e foi, justamente, em uma de suas viagens ao antigo Egito e para a Babilônia (cujo objetivo era o de ampliar seus conhecimentos ao mesmo tempo que os disseminava), em meio a suas pesquisas e seus métodos de observação, que ele percebeu que os raios solares quando chegavam à Terra, eram inclinados e paralelos, concluindo assim que era perfeitamente proporcional entre as medidas da sombra e da altura dos objetos.

Com base em seus registros e esquemas, Tales conseguiu medir a altura da pirâmide Quéops, no Egito, baseada no tamanho da sombra dela. Ele fincou uma estaca na areia, mediu as sombras da respectiva pirâmide e da estaca em uma certa hora do dia e estabeleceu uma proporção conforme pode ser visto na Figura 1 (SILVA, 2019).

Figura 1: A pirâmide da experiência de Tales.

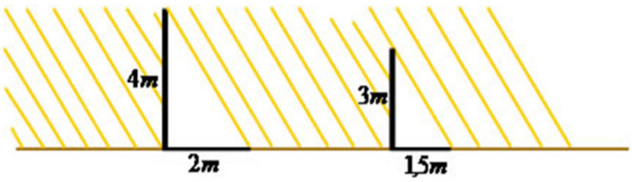


Fonte: https://www.estudopratico.com.br/teorema-de-tales/ (2014).

Segundo Eves (2007), Tales de Mileto era mercador, e depois ficou muito rico. Dedicou grande parte de sua vida aos estudos e a grandes viagens. E foi numa dessas viagens ao Egito, que ele criou o Teorema de Tales, com base na altura da sombra da grande pirâmide de Quéops, no Egito. Com o tempo, sua estratégia se aperfeiçoou aos poucos, passando a ser uma grande ferramenta na Geometria, cujo finalidade foi calcular distâncias e alturas difíceis de serem acessadas, de modo que fossem envolvidas proporcionalidades de triângulos ou semelhanças.

Silva (2019) menciona que Tales foi chamado de "o Pai da Geometria Descritiva", e para alguns também era chamado de "o Pai da Ciência" e da "Filosofia Ocidental", considerado como um grande contribuinte no avanço dos estudos de razão e de proporção, que até a atualidade são utilizados no cálculo de distâncias. A Figura 2 ilustra um exemplo da experiência de Tales de Mileto com razões e proporções de objetos e suas respectivas sombras.

Figura 2: Exemplo da experiência de Tales de Mileto.



Fonte: https://www.estudopratico.com.br/teorema-de-tales/ (2014).

Para Bezerra (2019), o grande Tales, além de pensador, expandiu os horizontes teóricos em várias áreas do conhecimento, como a Matemática, a Filosofia e a Astronomia, considerando a "água" como o principal elemento da natureza e a essência de todas as coisas. Além disso, o autor menciona que Tales fundou na cidade de Mileto, a renomada "Escola Jônica", conhecida como a escola filosófica mais antiga, cujos pensadores tentavam buscar explicações no Cosmos, ou seja, por meio da observação dos fenômenos da natureza.

Eves (2007) acrescenta que Tales, juntamente aos filósofos Anaximandro e Anaxímenes, fundou também a renomada Escola de Mileto (a milésima), cujos adeptos à Filosofia, pautava-se nos deuses antropomórficos (refere-se a deuses com características humanas) e aos fenômenos da natureza.

O grande Aristóteles (384 a. C. – 322 a.C.), filósofo grego, aponta Tales como o primeiro a filosofar em toda a humanidade. Como se pode observar, este grande homem fez muito em conhecimentos nas grandes áreas do saber como a Astronomia, a Filosofia, a Matemática e outras (BEZERRA, 2019).

Por fim, Boyer (2000), conjectura que esse grande matemático, pode ter sido o criador da geometria demonstrativa. Daí, ele ser mais conhecido como o primeiro matemático a dar uma contribuição à organização da Geometria.

O que é o teorema de Tales?

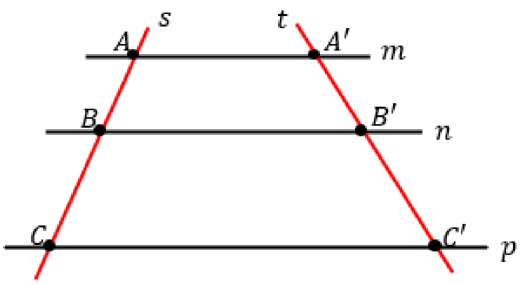
O teorema de Tales segundo vários autores, como Bezerra (2019), Porfírio (2018) e Silva (2019), tem sua origem ligada à resolução de problemas práticos envolvendo paralelismo e proporcionalidade, concentra-se na relação entre o geométrico e o numérico. Por isso, esse teorema significa muito na teoria da semelhança e consequentemente na trigonometria, onde justifica as definições de seno, cosseno e tangente de dado ângulo. Na Geometria espacial, o teorema de Tales, aparece ao tratar das secções por um plano paralelo à base.

Visando responder ao questionamento proposto nessa seção, enuncia-se, a seguir, o que, de fato, retrata o teorema de Tales.

Teorema (teorema de Tales): *Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma dessas transversais é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.*

Como o objetivo dessa pesquisa é apenas apresentar o teorema de Tales, suas consequências e algumas de suas aplicações, além de discutir sobre sua aplicabilidade em sala de aula, não será fornecida, aqui, uma demonstração matemática formal para este teorema. Todavia, uma prova do teorema de Tales pode ser encontrada, por exemplo, nos textos de Dolce e Pompeo (2010) e Muniz Neto (2013). Para compreensão do que seja a proporcionalidade existente no teorema de Tales, temos a seguinte ilustração dada na Figura 3, onde formam um feixe de retas paralelas cortadas pelas retas transversais .

Figura 3: Esquemas de proporcionalidade dados pelo teorema de Tales.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

Fonte: O próprio autor.

Observe que as relações estabelecidas no teorema de Tales envolvem, apenas, noções de razão e proporção. Por exemplo, na primeira relação o segmento está para o segmento assim como o segmento está para o segmento . A igualdade entre as duas razões formam uma proporção e o cálculo dessa proporção pode ser resolvido através de uma simples multiplicação cruzada, ou de acordo com a propriedade das proporções: o produto dos meios é igual ao produto dos extremos (GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 2010).

Um outro fato importante é que o teorema de Tales só tem validade sobre retas paralelas. Além disso, as retas transversais não precisam ter a mesma inclinação (SILVA, 2019).

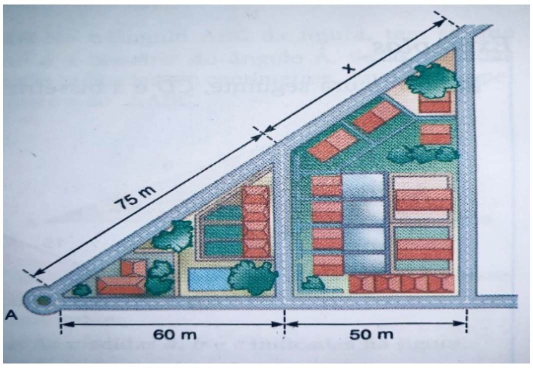
Giovanni Jr e Castrucci (2007) mencionam que, por muitos séculos, esse teorema recebeu o nome de *teorema dos segmentos proporcionais.* E, por volta do século XIX, na França o renomearam para teorema de Tales, onde está registrado no livro francês *Éléments de géométrie de Rouche e Comberousse* (reedição de 1883). Segundo o autor, em países como a Alemanha, esse nome ficou definido com um enunciado diferente do clássico, assim escrito: “todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo”.

Exemplos de aplicação do teorema do Tales

Com intuito de aperfeiçoar a compreensão do teorema de Tales, lista-se, a seguir, alguns exemplos simples, mas que podem ser resolvidos como uma aplicação direta desse teorema. O primeiro desses exemplos é um problema que pode ser relacionado até mesmo com o próprio cotidiano do indivíduo.

Exemplo 1 (GIOVANNI; BONJORNO, 2000): *Duas avenidas partem de uma mesma rotatória localizada num ponto e são cortadas por duas ruas paralelas conforme ilustrado na Figura 3.4. Em uma das avenidas, o comprimento dos dois primeiros quarteirões determinados pelas ruas paralelas são, respectivamente, e . Sabendo-se que na outra avenida a medida do primeiro quarteirão (correspondente àquela considerada na primeira avenida) é igual a , determinar a medida do comprimento do outro quarteirão nessa avenida.*

Figura 4: Teorema de Tales no cotidiano.



Fonte: Giovanni e Bonjorno (2000).

Solução: A ilustração da Figura 4 mostra a configuração de duas retas paralelas (às ruas) intersectadas por duas retas transversais (às avenidas). Logo, aplicando-se diretamente o teorema de Tales, obtém-se

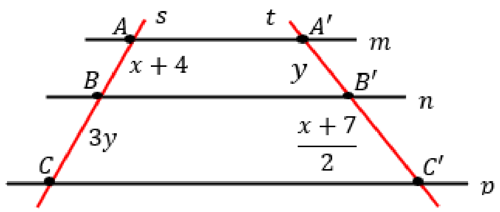
$$\frac{75}{x} = \frac{60}{50},$$

ou, equivalentemente, $60x = 3750$, de onde se conclui facilmente que $x = 62{,}5$. Portanto, o comprimento do outro quarteirão procurado é $62{,}5\ m$. ■

Exemplo 2: *Sejam m, n e p retas paralelas, com n entre m e p. A transversal s determina sobre m, n e p os pontos A, B e C, ao passo que a transversal t determina sobre m, n e p os pontos correspondentes A', B' e C'. Esses seis pontos determinados por esse feixe de retas paralelas, m, n e p , intersectadas por essas duas transversais, s e t, são tais que $AB = x + 4$, $BC = 3y$, $A'B' = y$ e $B'C' = (x+7)/2$. Sabendo-se que $x + y = 5$, determinar o valor de BC.*

Solução: A Figura 5 ilustra a situação descrita no enunciado do problema.

Figura 5: Aplicação do teorema de Tales.



$$\boxed{x + y = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 - y}$$

Fonte: O próprio autor.

Note que, de acordo com o teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{x+4}{3y} = \frac{y}{\frac{x+7}{2}},$$

ou, equivalentemente,

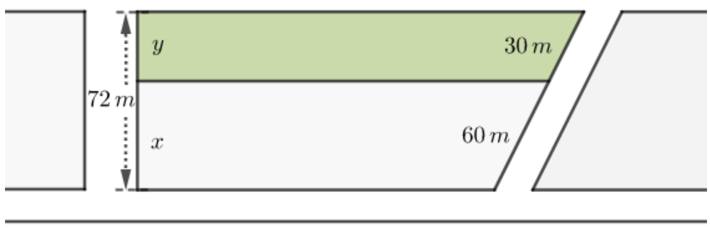
$$\frac{x+4}{3y} = \frac{2y}{x+7}. \qquad (1)$$

Uma vez que, por hipótese, $x + y = 5$, isto é, $x = 5 - y$, então de (1), obtém-se $(9 - y)(12 - y) = 6y^2$ ou, ainda, $5y^2 + 21y - 108 = 0$. Daí, resolvendo-se a equação do 2º grau anterior, obtém-se: $y = 3$ ou $y = -7{,}2$. Todavia, como os segmentos têm medidas positivas, conclui-se que $y = 3$ e, portanto, $BC = 3y = 9$ unidades de comprimento. ■

O último exemplo dessa seção também pode ser encarado como um problema do cotidiano e utiliza, para sua solução, a segunda relação de proporcionalidade (dada na Figura 3) fornecida pelo teorema de Tales.

Exemplo 3: *Deseja-se determinar as medidas dos comprimentos frontais de dois terrenos, com laterais paralelas, de um certo loteamento. Se a Figura 6 ilustra esses terrenos, determinar os valores e que representam essas medidas.*

Figura 6: Terrenos de laterais paralelas e o teorema de Tales.



Fonte: O próprio autor.

Solução: Observando-se a Figura 6 e aplicando-se o teorema de Tales, obtém-se

$$\frac{y+x}{y} = \frac{30+60}{30}.$$

Uma vez que $y + x = 72$, então a partir da igualdade anterior, obtem-se $3y = 72$, de onde se conclui que $y = 24$.

Agora, como $y + x = 72$ e $y = 24$, tem-se $24 + x = 72$ ou, ainda, $x = 48$. Portanto, as medidas frontais dos dois terrenos são, respectivamente, $y = 24\ m$ e $x = 48\ m$. ■

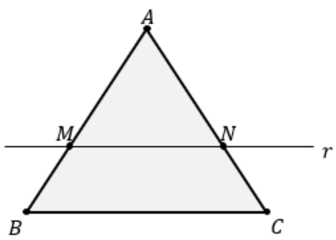
Algumas consequências do teorema de Tales nos triângulos

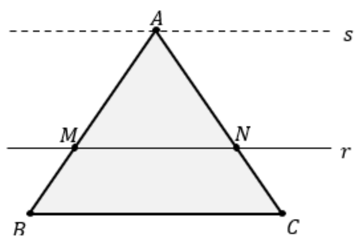
Como uma primeira consequência do teorema de Tales aplicado aos triângulos, temos o seguinte resultado:

Corolário 1: *Seja um triângulo qualquer. Se é uma reta paralela a um dos lados do triângulo que intersecta os outros dois lados de em pontos distintos, então ela determina sobre esses dois lados, segmentos que são proporcionais.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, considere um triângulo , onde é uma reta paralela, por exemplo, ao lado , com e sendo seus respectivos pontos de interseção com os lados e , conforme ilustrado na Figura 7(a).

Figura 7(a): Paralela a um dos lados de um triângulo. **Figura 7(b)**: Teorema de Tales no triângulo.





Fonte: O próprio autor.

Fonte: O próprio autor.

Agora, traçando-se pelo vértice A uma reta s que seja paralela à reta r, obtém-se um feixe de três paralelas (r, s e $\overleftrightarrow{BC}$) cortadas pelas transversais $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, conforme ilustra a Figura 7(b).

Finalmente, aplicando-se o teorema de Tales nessa nova configuração, obtém-se:

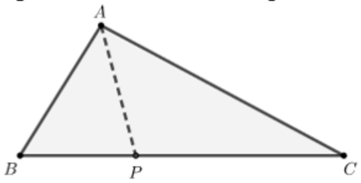
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}. \qquad \blacksquare$$

Um outro resultado que pode ser aplicado aos triângulos e que surge a partir do teorema de Tales é o chamado *teorema da bissetriz interna*, enunciado a seguir.

Corolário 2: *A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo determina, sobre o lado oposto, segmentos que são proporcionais aos lados do triângulo que formam o ângulo considerado. Em outras palavras, considerando a Figura 8, se P é o pé da bissetriz interna relativa ao lado* $\overline{BC}$ *de um triângulo* ABC, *então*

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

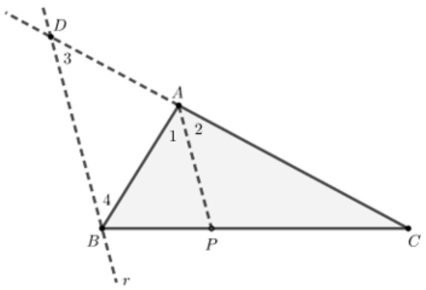
Figura 8: Bissetriz interna do ângulo de um triângulo e o teorema de Tales.



Fonte: O próprio autor.

Demonstração: Considere o triângulo ABC ilustrado na Figura 8, onde P é o pé da bissetriz interna relativa ao lado $\overline{BC}$. Traçando-se pelo ponto B uma reta r que seja paralela à reta $\overleftrightarrow{AP}$ (bissetriz do ângulo $\hat{A}$) e marcando-se seu ponto de interseção (denotado por D) com a reta $\overleftrightarrow{AC}$, obtém-se um triângulo ABD ilustrado na Figura 9.

Figura 9: Construção geométrica para prova do teorema da bissetriz.



Fonte: O próprio autor.

Uma vez que a reta r é paralela à reta $\overleftrightarrow{AP}$, os *ângulos correspondentes* $\hat{3}$ e $\hat{2}$ (dados na Figura 9), formados pela intersecção dessas retas com a reta transversal $\overleftrightarrow{DC}$, são congruentes, ou seja, $\hat{3} \equiv \hat{2}$. Consequentemente, como $\overleftrightarrow{AP}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, conclui-se que $\hat{3} \equiv \hat{2} \equiv \hat{1}$.

Agora, considerando-se a reta transversal $\overleftrightarrow{AB}$ que intersecta as retas paralelas r e $\overleftrightarrow{AP}$, conclui-se que os *ângulos alternos internos* $\hat{1}$ e $\hat{4}$ são congruentes, isto é, $\hat{1} \equiv \hat{4}$. Daí, como $\hat{3} \equiv \hat{2} \equiv \hat{1}$, pode-se afirmar que os ângulos internos $\hat{4}$ e $\hat{3}$ do triângulo ABD são congruentes, de onde se conclui que o triângulo ABD é isósceles de base $\overline{BD}$.

Fonte: O próprio autor.

Uma vez que a reta r é paralela à reta $\overleftrightarrow{AP}$, os *ângulos correspondentes* $\hat{3}$ e $\hat{2}$ (dados na Figura 9), formados pela intersecção dessas retas com a reta transversal $\overleftrightarrow{DC}$, são congruentes, ou seja, $\hat{3} \equiv \hat{2}$. Consequentemente, como $\overleftrightarrow{AP}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, conclui-se que $\hat{3} \equiv \hat{2} \equiv \hat{1}$.

Agora, considerando-se a reta transversal $\overleftrightarrow{AB}$ que intersecta as retas paralelas r e $\overleftrightarrow{AP}$, conclui-se que os *ângulos alternos internos* $\hat{1}$ e $\hat{4}$ são congruentes, isto é, $\hat{1} \equiv \hat{4}$. Daí, como $\hat{3} \equiv \hat{2} \equiv \hat{1}$, pode-se afirmar que os ângulos internos $\hat{4}$ e $\hat{3}$ do triângulo ABD são congruentes, de onde se conclui que o triângulo ABD é isósceles de base $\overline{BD}$.

Finalmente, como o triângulo ABD é isósceles de base $\overline{BD}$, então $AB = AD$, e aplicando-se o teorema de Tales às paralelas r e $\overleftrightarrow{AP}$, intersectadas pelas transversais $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{CB}$ (veja também Corolário 1), obtém-se

$$\frac{CA}{AB} = \frac{CA}{AD} = \frac{CP}{BP},$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC},$$

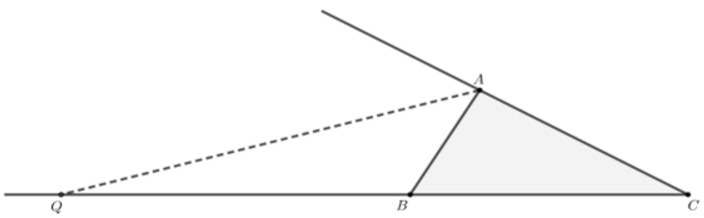
exatamente como se desejava. ■

De maneira análoga à prova do Corolário 2 (teorema da bissetriz interna) é possível demonstrar também o chamado “teorema da bissetriz externa” enunciado a seguir.

Corolário 3: *Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intersecta a reta que contém o lado oposto a esse ângulo, então ela divide esse lado oposto externamente sobre o lado oposto, segmentos (subtrativos) proporcionais aos lados adjacentes. Em outras palavras, considerando a Figura 3.12, se Q é o pé da bissetriz externa relativa ao lado $\overline{BC}$ de um triângulo ABC, então*

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{AB}{AC}.$$

Figura 10: Bissetriz externa do ângulo de um triângulo e o teorema de Tales.



Fonte: O próprio autor.

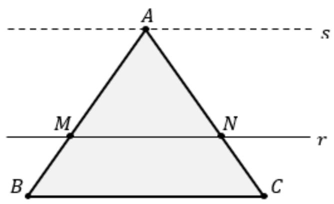
Para encerrar essa seção, apresenta-se, a seguir, uma consequência do teorema de Tales nas relações de semelhança entre triângulos. Vale ressaltar aqui que dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são *semelhantes (denotado aqui $ABC \sim A'B'C'$)* se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos (ou correspondentes) proporcionais, isto é,

$$ABC \sim A'B'C' \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} \equiv \widehat{A'}, \hat{B} \equiv \widehat{B'}, \hat{C} \equiv \widehat{C'} \quad \text{e} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k.$$

Corolário 4: *Seja ABC um triângulo qualquer. Se r é uma reta paralela a um dos lados do triângulo ABC que intersecta os outros dois lados de ABC em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, considere um triângulo ABC, onde r é uma reta paralela, por exemplo, ao lado $\overline{BC}$ (com M e N sendo seus respectivos pontos de interseção com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$) determinando o triângulo AMN conforme ilustrado na Figura 11.

Figura 11: Teorema de Tales e semelhança de triângulos.



$$\boxed{r \parallel \overleftrightarrow{BC} \quad \Longrightarrow \quad ABC \sim AMN}$$

Fonte: O próprio autor.

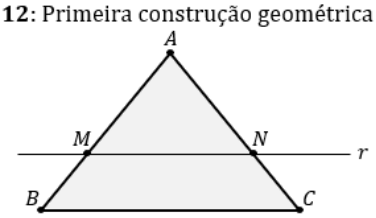
Com a construção da Figura 11, deseja-se mostrar, portanto, que os triângulos ABC e AMN são semelhantes. Para isso, deve-se verificar que os ângulos correspondentes são congruentes, isto é, $\hat{A} \equiv \hat{A}$ (o que obviamente é verdadeiro), $\widehat{M} \equiv \hat{B}$ e $\widehat{N} \equiv \hat{C}$, e que os lados correspondentes são proporcionais, ou seja,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}\,. \tag{2}$$

Para o que resta mostrar na primeira parte, isto é, a congruência dos ângulos $\widehat{M}$ e $\hat{B}$, e congruência de $\widehat{N}$ e $\hat{C}$, basta observar que as retas r e $\overleftrightarrow{BC}$ sendo paralelas e intersectadas pelas transversais $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, determinam pares de ângulos correspondentes congruentes.

Para provar a proporcionalidade entre os respectivos lados dos triângulos ABC e AMN, incialmente traça-se, pelo vértice A, uma reta s que seja paralela à reta r, obtendo-se um feixe de três paralelas (r, s e $\overleftrightarrow{BC}$) cortadas pelas retas transversais $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, como ilustrado na Figura 12.

Figura 12: Primeira construção geométrica para prova do Corolário 4.



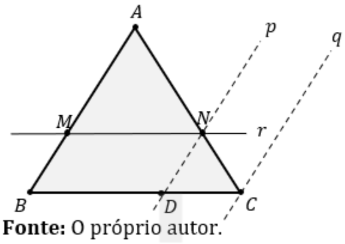
Fonte: O próprio autor.

Depois, aplica-se o teorema de Tales na construção da Figura 12 para se concluir que

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}. \qquad (3)$$

Uma vez que um *paralelogramo* é um quadrilátero plano convexo se, e somente se, possui os lados opostos paralelos, traçando-se na Figura 11 as retas, p e q, paralelas ao lado $\overline{AB}$ que passam, respectivamente, por N e por C (veja Figura 13), obtém-se o paralelogramo $MBDN$ (onde D é o ponto de intersecção da reta p com a lado $\overline{BC}$), já que a reta r é paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$, e a reta p é paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Figura 13: Segunda construção geométrica para prova do Corolário 4.



Fonte: O próprio autor.

Agora, levando-se em consideração que uma das propriedades satisfeitas pelos paralelogramos é que eles têm lados opostos congruentes, conclui-se que $MN = BD$. Consequentemente, aplicando-se o teorema de Tales ao feixe de retas paralelas formado por p, q e $\overleftrightarrow{AB}$, intersectadas pelas transversais $\overleftrightarrow{CA}$ e $\overleftrightarrow{CB}$, obtém-se

$$\frac{MN}{BC} = \frac{BD}{BC} = \frac{AN}{AC}. \qquad (4)$$

Finalmente, usando-se os resultados encontrados nas equações (3) e (4), obtém-se o resultado desejado em (2), e isto conclui a prova do corolário. ■

O teorema de Tales na prática: sugestões didáticas

Quando se trata de ensino e de aprendizagem, em especial nas aulas de Matemática, o professor na sua rotina cotidiana, deve sempre buscar alternativas que viabilizem seu trabalho

O teorema de Tales na prática: sugestões didáticas

Quando se trata de ensino e de aprendizagem, em especial nas aulas de Matemática, o professor na sua rotina cotidiana, deve sempre buscar alternativas que viabilizem seu trabalho e facilite maior compreensão dos alunos em relação aos conteúdos repassados, ainda mais quando o assunto é Geometria, no caso teorema de Tales, objeto de investigação dessa pesquisa.

Vários aspectos relevantes precisam ser apontados e respeitados, como a maturidade da turma, o nível dos alunos, quais noções eles tem trazido dos anos anteriores, além do acompanhamento em casa pela família. Considerando todos estes pontos e mais alguns, é possível que se sugira opções inovadoras e diferenciadas para serem aplicadas em sala de aula, como as que se propõem a seguir.

Estratégias de leitura na compreensão do teorema de Tales

Vários são os motivos por que alunos se queixam em relação ao aprendizado nos conteúdos de Matemática em geral, provocando às vezes rejeição por aprender sobre os problemas típicos desta área na sala de aula. Optou-se por registrar algumas estratégias de leitura, visando facilitar esse entendimento, uma vez que a Geometria também é considerada tão difícil quanto outros segmentos matemáticos.

Para Guimarães e Stoltz (2008), a realidade vivida em sala de aula, o que pode fazer sentido na vida do aluno, são as ações que se alinham com a sua realidade, seu contexto, pois ensinar na Matemática apenas o abstrato, não torna mais fácil a aprendizagem, nem tão pouco desperta interesse desses alunos quando alcança os conteúdos geométricos.

Com base nessas considerações preliminares, Charlot (2005) compreende que só tem sentido no processo da aprendizagem, aquilo que tiver muita importância e o leve a aprender mais para ser aplicado na sua vida social dentro e para além da escola, como é necessário que seja suscitado sempre uma situação de aprendizagem adequada.

Até pouco tempo, não se imaginava que era preciso maior preocupação quanto à leitura matemática, uma vez que se o aluno não souber ler bem e compreender o que lê, não poderá saber interpretar uma mínima sentença que seja. Daí o professor se preocupar com isso.

Considerando que estratégias são necessárias para entender um texto, com o ensino matemático não poderia ser diferente. Pois, em uma turma de alunos de qualquer sala de aula, e em especial à do 9º ano, onde o teorema de Tales geralmente é tratado, vários são os níveis de maturidade e ritmo do alunado. Há outros aspectos igualmente importantes, como o acompanhamento da família, alguns problemas de aprendizagem, entre outros. Assim, foi possível pensar na possibilidade de opções diversas para serem aplicadas em classe.

O que se observa na sala de aula no dia a dia, começando pelos anos iniciais do Ensino Fundamental, é a maneira como os alunos resolvem qualquer problema, por mais simples que sejam. Muitos até conseguem resolver um pequeno problema, porém, não compreendem de que maneira foi feito, ou seja, não é consciente do resultado obtido, nem do método que utilizou para fazê-lo (CONCEIÇÃO, 2019).

Segundo a opinião do autora, não é importante resolver um problema por resolver, porque toda situação de aprendizagem requer ideias sobre ela, e o aluno que não entende o que está fazendo, a aprendizagem não foi eficaz, com certeza, é aí que o professor precisa explorar estratégias que venham inovar sua prática.

Para Conceição (2019, p.23):

> É possível que estratégias factíveis de serem realizadas, podem facilitar o ensino do teorema de Tales em sala de aula com os alunos do 9º
>
> Ano do Ensino Fundamental, como a seguir: produção científica aproximando o objeto da pesquisa, onde a pesquisa levará o aluno a pesquisar e além de ficar atualizado, pode articular os conhecimentos adquiridos nas pesquisas com seu contexto social.

A autora acredita que outras estratégias podem ser trabalhadas na compreensão do desse tema em sala de aula, como o levantamento bibliográfico, orientado pelo professor e apoiado pela equipe pedagógica da escola, aprofundamento do estudo da Geometria e sua relação com o teorema de Tales, utilizando-se do seu contexto.

Ainda segundo Conceição (2019), não apenas o professor de Língua Portuguesa deve desenvolver habilidades e competências como argumentação, interpretação, representação e comunicação entre outras, uma vez que todas elas são indispensáveis no entendimento de conceitos matemáticos não somente na abstração, quanto na prática, o que remete à compreensão.

O significado da resolução de problemas no cotidiano do aluno

O que tem se observado no ensino de Matemática, com base em experiências do dia a dia, é que esta ciência tem sido considerada uma vilã, devido às dificuldades encontradas pelos alunos em compreender uma sentença matemática, entender uma fórmula, uma regra, ou discernir os conceitos matemáticos mais complexos, em dominar o jogo dos sinais que caracterizam os vários tipos de operações algébricas, entre outros conteúdos.

Por isso, cabe ao professor buscar os melhores métodos possíveis para que esse ensino seja viabilizado em sala de aula, em todos os segmentos da Matemática, e em especial, aos conteúdos relacionados ao teorema de Tales.

Nesse contexto, uma das estratégias mais importantes no ensino da Matemática, é a resolução de problemas, onde o aluno é orientado a desenvolver sua capacidade de compreensão e interpretação de uma sentença, para depois resolvê-la; outra habilidade a ser desenvolvida é o raciocínio lógico, indispensável no dia a dia em todas as atividades que envolvem Matemática, considerando que não se pode viver sem esta ciência.

A metodologia de resolução de problemas é muito utilizada nas aulas desta disciplina, em qualquer conteúdo, porque resolver problemas faz parte de seu funcionamento e pode facilitar na minimização das dificuldades de aprendizagem dos alunos.

Em se tratando do teorema de Tales, a resolução de problemas também é muito eficaz na absorção e aprendizagem desse teorema. Na medida do possível, é interessante inserir, nesses problemas, conceitos já estudados assim como novos conceitos da matemática. É possível tornar as aulas de Matemática bem mais dinâmicas e atraentes considerando também os saberes que os alunos trazem de casa, e inserido novas estratégias facilitadoras desse trabalho, como a conexão com outras áreas e ciências.

Nesta perspectiva, pode ser trabalhado semelhanças de triângulos, os conceitos sobre razão e proporção na Geometria, cujos recursos são normalmente empregados no campo da Engenharia, na Arquitetura, na Topografia e em outras atividades profissionais, para o cálculo de distâncias e alturas inacessíveis, ressaltando a importância da aplicação desse teorema na prática (LUPINACCI; BOTIN, 2004).

Lupinacci e Botin (2004) mencionam ainda que o professor pode também utilizar e explorar bem a técnica de desenhos, de fotografias, ampliar e reduzir figuras, medir e interpretar, identificar a proporção na Geometria, em especial a parte dos triângulos. Muitos problemas podem ser sugeridos nesse exercício em sala de aula, estimulando os alunos a descobrir novas observações acerca dos triângulos no próprio contexto onde vive.

Vale ressaltar que os autores afirmam que a resolução de problemas é uma velha metodologia, explorada das mais variadas formas, mas através de um novo olhar, pode ser desenvolvida em sala de aula, aproveitando a interação dos alunos com suas ideias inovadoras, típicas do atual contexto científico e tecnológico. Pela metodologia mencionada, será desenvolvido sua capacidade de observar, pensar, interpretar, estabelecer relações, generalizar e concluir, bem como estimular o espírito crítico e o modo de pensar matematicamente falando.

Para Dante (2010, p.18), "é preciso desenvolver no aluno a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, no sentido de solucionar as questões surgidas no cotidiano na escola ou fora dela".

Assim, em se tratando do teorema de Tales, pode-se vislumbrar melhores resultados, em sala de aula, ao longo do trabalho do professor, quando suas estratégias forem bem conduzidas para a resolução dos problemas encontrados na prática.

Considerações Finais

Como foi visto ao longo dessa pesquisa, o teorema de Tales é um dos grandes e importantes resultados da Geometria que já era estudado desde os tempos antigos, mesmo sem todo o aparato da matemática moderna, e que ainda é muito importante na matemática atual. Muitos são os resultados que seguem desse teorema além daqueles que foram explorados aqui. Todavia, nos triângulos, e em especial, na semelhança de triângulos, esse teorema ganha grande destaque.

O estudo do teorema de Tales também é muito útil no que se refere a revisão e absorção de conceitos da Geometria, tais como: ponto, reta, plano, segmento de reta, retas paralelas, feixe de retas paralelas cortadas por transversais, razão, proporção, semelhança de triângulos, entre outros. A compreensão de tais conceitos é essencial no decorrer da aprendizagem de toda a geometria e, nesse aspecto, a análise do teorema de Tales também fornece sua contribuição.

Conforme foi abordado no percurso dessa pesquisa, vale registrar a importância que tiveram as sugestões didáticas com respeito ao ensino e aprendizagem do teorema de Tales "na prática", onde foram apresentas sugestões para serem propostas em sala de aula no ensino da Geometria, mais especificamente no que se refere ao teorema de Tales e sua aplicabilidade no cotidiano. É preciso inovar na sala de aula o tempo todo, pois os conhecimentos já adquiridos na classe devem ser atrelados aos saberes trazidos pelos alunos, no propósito de facilitar a aprendizagem.

Vale salientar que esta pesquisa é parte de um trabalho de monografia de conclusão de curso de Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, e contribuiu para o amadurecimento de algumas concepções a serem levadas à sala de aula com intuito de melhorar o desempenho de quem estuda este importante teorema da Geometria.

Referências

ALMEIDA, C. S. **Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área**. 2006. Disponível. em: <http://www.ucb.br/sites/100/103/tcc/12006/cinthiasoaresdealmeida.Pdf>. Acesso em: 05/12/2019.

BEZERRA, J. **Teorema de Tales, Matemática**. Toda Matéria, 2019. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/tales-de-mileto>. Acesso em: 08/12/2019.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática /Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base.** Brasília**,** MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ima ges/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em: 02/01/2020.

CHARLOT, B. **Relação com o Saber, Formação dos professores e Globalização** – questões para a educação hoje**.** Trad. Sandra Loguercio. Porto Alegre: Artmed, 2005.

CONCEIÇÃO, F. H. G. **Estratégias de leitura e seus efeitos na aprendizagem sobre o teorema Tales de Mileto:** um estudo com alunos da rede **pública** estadual de Sergipe. 2019. 180 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2019.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. São Paulo: Ática, 2010.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**. **Volume 9: Geometria Plana**. São Paulo: Editora Atual, 2010.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2007.

FACHIN, O. **Fundamentos da Metodologia Científica**: noções básicas sobre pesquisa científica. 6 ed. Saraiva: São Paulo, 2017.

FERNANDES, A. R. B. et al. **Principais motivos que dificultam a aprendizagem da matemática.** In: XI Encontro de Iniciação à Docência. [s.n.], 2009.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática**: uma nova abordagem, v. 1: versão progressões. São Paulo: FTD, 2000.

GIOVANNI JR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática**. São Paulo: FTD, 2007.

GIOVANNI JR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática**. São Paulo: FTD, 2010.

GUIMARÃES, S. R. K; STOLTZ, T. **Tomada de consciência e conhecimento metacognitivo.** Curitiba: Editora UFRPR, 2008.

LUPINACCI, V.L.M.; BOTIN, M.L.M. **Resolução de problemas no ensino de Matemática.** In: Encontro Nacional de Educação Matemática, Anais... 8. 2004, Recife. p. 1-5.

MENDES, I.A. **Matemática e investigação em sala de aula**: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MUNIZ NETO, A., C. **Geometria**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN). **Matemática — 5' a 8' Série**. Brasília, 1998.

PORFÍRIO, F. **Tales de Mileto**; Brasil Escola. 2018. Disponível em: <https://brasilescola. uol. com.br/biografia/tales-de-mileto.htm>. Acesso em: 05/01/2020.

SILVA, M. N. P. **Aplicações do teorema de Tales**; Brasil Escola. 2019. Disponível em: <https:// brasilescola.uol.com.br/matematica/aplicacoes-teorema-tales.htm>. Acesso em: 15/01/2020.

Recebido em 27 de agosto de 2020.
Aceito em 15 de setembro de 2020.