

MODELAGEM MATEMÁTICA E OTIMIZAÇÃO DA PRODUÇÃO AGRÍCOLA COM BASE NA ÁREA DE PLANTIO

MATHEMATICAL MODELING AND OPTIMIZATION OF AGRICULTURAL PRODUCTION BASED ON PLANTING AREA

Eduardo Félix Pita Duarte 1

Resumo: Este estudo teve como objetivo modelar uma função matemática para analisar a relação entre a área de plantio e a produção agrícola no distrito de Angónia, com base em dados fornecidos pelo Serviço Distrital das Atividades Econômicas de Angónia. Utilizando a abordagem da modelagem matemática, foram aplicados modelos de regressão não linear, especificamente o modelo exponencial, para a análise e modelagem dos dados, utilizando o software IBM SPSS. Os resultados obtidos revelaram que o modelo exponencial adotado explicou aproximadamente 98,4% da variação nos dados. Foi observado que não existe um limite máximo para a produção agrícola com base na área de plantio, pois a produção aumenta de forma exponencial à medida que a área de plantio é ampliada. Essa conclusão foi alcançada por meio de análises analíticas e gráficas. Portanto, este estudo demonstrou que a modelagem matemática, utilizando o modelo exponencial, é uma abordagem adequada para compreender a relação entre a área de plantio e a produção agrícola no distrito de Angónia. Os resultados destacam a importância de considerar o aumento da área de plantio como um fator essencial para impulsionar o crescimento da produção agrícola.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Área de Plantio. Produção Agrícola. Regressão não Linear. Modelo Exponencial.

Abstract: This study aimed to develop a mathematical modeling to analyze the relationship between planting area and agricultural production in the Angónia district, based on data provided by the District Service of Economic Activities in Angónia. Utilizing mathematical modeling approach, nonlinear regression models, specifically the exponential model, were applied for data analysis and modeling using IBM SPSS software. The obtained results revealed that the adopted exponential model explained approximately 98.4% of the data variation. It was noted that there is no maximum limit for agricultural production based on the planting area, as production increases exponentially as the planting area expands. This conclusion was reached through analytical and graphical analyses. Therefore, this study demonstrated that mathematical modeling, using the exponential model, is an appropriate approach to understand the relationship between planting area and agricultural production in the Angónia district. The results underscore the importance of considering the increase in planting area as an essential factor to drive agricultural production growth.

Keywords: Mathematical Modeling. Planting Area. Agricultural Production. Nonlinear Regression. Exponential Model.

1 - Licenciado em Ensino de Matemática com Habilitação em Estatística. Assistente Universitário na Faculdade de Ciências Agrárias da Unizambeze (Ulongue). Orcid: <https://orcid.org/0009-0008-6082-1421>.
E-mail: eduardolagrange1234@gmail.com

Introdução

A relação entre a área de plantio e a produção agrícola é um tema de grande relevância para o setor agrícola, pois compreender como a área cultivada influencia a produção é essencial para otimizar a produtividade. Estudos recentes demonstram que a eficiência na utilização da área de plantio pode impactar significativamente a rentabilidade dos cultivos, conforme evidenciado por Silva et al. (2021) e Costa et al. (2022), que analisaram a dinâmica da produção em diferentes contextos agrícolas.

Neste estudo, a conexão entre área de plantio e produção foi explorada no distrito de Angónia, utilizando a modelagem matemática como ferramenta central para entender essa dinâmica. O objetivo principal desta pesquisa foi desenvolver um modelo que explicasse como a área de plantio afeta diretamente a produção agrícola. Para isso, foram avaliados diferentes modelos de regressão, tanto lineares quanto não lineares, sendo o modelo exponencial o mais adequado para descrever essa relação, conforme apontado por Mendes e Almeida (2023).

Os resultados mostraram que o modelo exponencial apresentou um ajuste notável, explicando aproximadamente 98,4% da variação nos dados coletados. A significância estatística dos coeficientes validou o modelo testado. No entanto, é importante ressaltar que este estudo focou exclusivamente na área de plantio como variável explicativa, assumindo que outros fatores, como o tipo de grão cultivado, condições climáticas, características do solo, uso de mão-de-obra e maquinário, são homogêneos ao longo do período analisado e das áreas cultivadas. Essa simplificação foi adotada para facilitar a modelagem inicial, com a possibilidade de incluir variáveis adicionais em estudos futuros.

A análise das estimativas de parâmetros reforçou a eficácia do modelo exponencial, mostrando que a produção agrícola aumenta exponencialmente à medida que a área de plantio se expande. Embora o modelo tenha se mostrado eficaz, algumas limitações foram identificadas, como a necessidade de ajustes para evitar valores teóricos inconsistentes, como áreas de plantio nulas ou negativas. Esses refinamentos permitiram uma representação mais fiel do comportamento esperado.

Assim, este estudo oferece insights valiosos sobre a relação entre a área de plantio e a produção agrícola e sublinha a importância de modelos de regressão na previsão do crescimento da produção agrícola em função das variações na área de plantio, reconhecendo que simplificações feitas no modelo podem ser expandidas em trabalhos futuros.

Metodologia

Os dados utilizados neste estudo foram fornecidos pelo Serviço Distrital das Atividades Econômicas de Angónia (SDAE) em formato Excel, disponibilizados por meio de um pen drive. Esses dados não estão acessíveis online. A base de dados inclui registros das áreas plantadas e da produção total de três culturas principais: soja, milho e feijão vulgar, abrangendo as campanhas agrícolas do período de 2015/16 a 2021/22.

Coleta de Dados: os dados foram extraídos diretamente dos registros do SDAE e compreendem informações anuais detalhadas sobre a área total cultivada e a respectiva produção em toneladas. As culturas analisadas — soja, milho e feijão vulgar — foram escolhidas pela sua relevância econômica e pela disponibilidade de dados consistentes ao longo dos anos.

Análise dos Dados e Modelagem Matemática: a análise estatística foi conduzida utilizando o software IBM SPSS Statistics, com foco na modelagem de regressões não lineares para explorar a relação entre a área de plantio e a produção agrícola. Foram testados diversos modelos de regressão, incluindo modelos lineares e não lineares. Entre eles, o modelo exponencial se destacou por apresentar o melhor ajuste aos dados, com um coeficiente de determinação (R^2) de 98,4%.

Testes e Seleção de Modelos: a fim de identificar o modelo mais adequado, foram testados sete modelos de regressão diferentes. Esses modelos variavam desde simples regressões

lineares até opções mais complexas, como os modelos quadrático, cúbico e exponencial. Os resultados de cada modelo, foram avaliados por meio de três métricas principais: o coeficiente de determinação (R^2), o valor de significância (Sig) e o erro padrão. O modelo exponencial apresentou o maior R^2 e o menor erro padrão, justificando sua escolha como o mais preciso para descrever a relação entre a área plantada e a produção.

Interpretação dos Parâmetros do Modelo Exponencial: com base nos resultados, o modelo exponencial foi selecionado por sua habilidade em explicar a maior parte da variação observada nos dados (98,4%). A equação que descreve a produção agrícola como função da área de plantio foi interpretada considerando os parâmetros estimados, que indicam um crescimento exponencial da produção à medida que a área aumenta. Esse comportamento foi confirmado tanto por análises analíticas quanto gráficas.

Limitações e Ajustes do Modelo: durante a análise, identificou-se que o modelo exponencial, em sua forma inicial, sugeria produção mesmo para áreas de plantio nulas ou negativas, o que não condiz com a realidade. Para mitigar essa discrepância, o modelo foi ajustado para considerar apenas áreas de plantio positivas, como discutido na seção de resultados e otimização.

Desenvolvimento, resultados e discussão

Resumo dos Resultados

Antes de se escolher um modelo que apresente melhores estimativas da produção com base na área total cultivada, foi preciso testar diversos modelos de regressão, dos quais destaca – se os lineares e não lineares.

A tabela 1 apresenta os diversos resultados dos parâmetros de sete (7) modelos de regressão.

Tabela 1. Resumo dos resultados

Ordem	Modelo	R - Quadrado	Sig	Erro Padrão
1	Linear	0,945	0,000	24664,469
2	Logaritmo	0,960	0,000	21091,139
3	Inverso	0,969	0,000	18512,015
4	Quadrático	0,976	0,001	18357,779

Fonte: Autor (Resultados da Pesquisa)

Nesta tabela, R-Quadrado (R^2): É uma medida estatística que indica o quão bem o modelo se ajusta aos dados observados. O R-quadrado varia de 0 a 1 e quanto mais próximo de 1, melhor é o ajuste do modelo aos dados (MBE, 2019).

Sig: Sig, ou significância, é um valor associado a um teste de hipótese estatística que avalia se os coeficientes do modelo são estatisticamente diferentes de zero. Um valor de 0,000 indica que os coeficientes são significativamente diferentes de zero, enquanto um valor maior do que isso indica que não há evidências estatísticas para rejeitar a hipótese de que os coeficientes são iguais a zero.

Erro Padrão: É uma medida da precisão do modelo, indicando o desvio padrão dos resíduos. Quanto menor o valor do erro padrão, melhor é o ajuste do modelo aos dados.

Escolha e Ajuste do Modelo

Avaliando o valor do R^2 com base na tabela 1, o modelo “Exponencial” apresenta o

melhor desempenho nesse parâmetro, com um valor de R-quadrado de 0,984. Isso indica que o modelo exponencial explica cerca de 98,4% da variação nos dados.

Concernente ao nível de significância, pelos dados, todos os modelos têm um valor de significância (Sig) igual a zero, indicando que os coeficientes são estatisticamente diferentes de zero. Portanto, não é possível determinar qual modelo é o melhor com base apenas nesse parâmetro.

Por outra, o erro padrão, o modelo “Exponencial” apresenta o menor valor de erro padrão, com um valor de 0,059. Isso indica que o modelo exponencial tem um ajuste mais preciso aos dados em comparação com os outros modelos listados.

De forma geral, com base nos valores apresentados na tabela, o modelo “Exponencial” tem o melhor desempenho e ajuste. Ele possui o maior valor de R-quadrado (0,994), indicando um bom ajuste aos dados, e o menor valor de erro padrão (0,059), sugerindo uma maior precisão.

Modelagem e Interpretação dos Coeficientes

A tabela 2 apresenta as estimativas dos parâmetros para cada modelo. Com base na tabela 1, o modelo exponencial é que apresenta melhores estimativas, então a análise das estimativas de parâmetros será nesse modelo.

Tabela 2. Estimativa dos parâmetros

Ordem	Estimativas de Parâmetro				
	Modelo	Constante	b1	b2	b3
1	Linear	-379613,849	5,103		
2	Logaritmo	-103E7	899517,140		
3	Inverso	1416945,898	-1.566E12		
4	Quadrático	-1.914E6	22,676	-4,983E-05	
5	Cúbico	-1.404E6	13,919	0,000	-9,389E-11
6	Potência	0,000	1,826		
7	Exponencial	82930,638	1,032E-05		

Fonte: Autor (Resultados da Pesquisa)

No modelo exponencial apresentado na tabela, a variável independente é a “Área Total” e a variável dependente é a produção agrícola. O modelo exponencial é representado pela equação 1 abaixo:

$$\text{Produção} = 82930.638 * e^{(1.032 \times 10^{-5} * \text{Área Total})} \quad (\text{eq1})$$

A interpretação desse modelo é baseada na função exponencial. Nesse caso, o coeficiente é o expoente da variável “Área Total”. Como b1 é positivo, a produção aumenta exponencialmente com o aumento da área. Cada aumento unitário na área (ha) resulta em um aumento de aproximadamente vezes na produção (ton).

Embora o modelo exponencial tenha mostrado um ajuste robusto para a relação entre área plantada e produção agrícola, é importante notar que outras variáveis como clima, tipo de grão, e recursos disponíveis, não foram incluídos pelo facto de o foco ter sido a aplicação da regressão simples e não múltipla ou de várias variáveis. Assim, os resultados apresentados refletem uma relação simplificada, que pode ser expandida em estudos futuros.

Otimização da Produção

Conforme Leal (2017), a otimização (maximização ou minimização) pode ser abordada calculando a derivada da função em relação à variável de interesse (neste caso, a área) e encontrando os pontos críticos onde a derivada é igual a zero

A equação da produção em função da área é dada por:

$$\text{Produção} = 82930.638 * e^{(1.032 \times 10^{-5} * \text{Área Total})}$$

A derivada da produção (por tabela) em relação à área é dada por:

$$\frac{d}{d\text{área total}} \text{Produção} = 82930.638 * 1.032 \times 10^{-5} * e^{(1.032 \times 10^{-5} * \text{Área Total})}$$

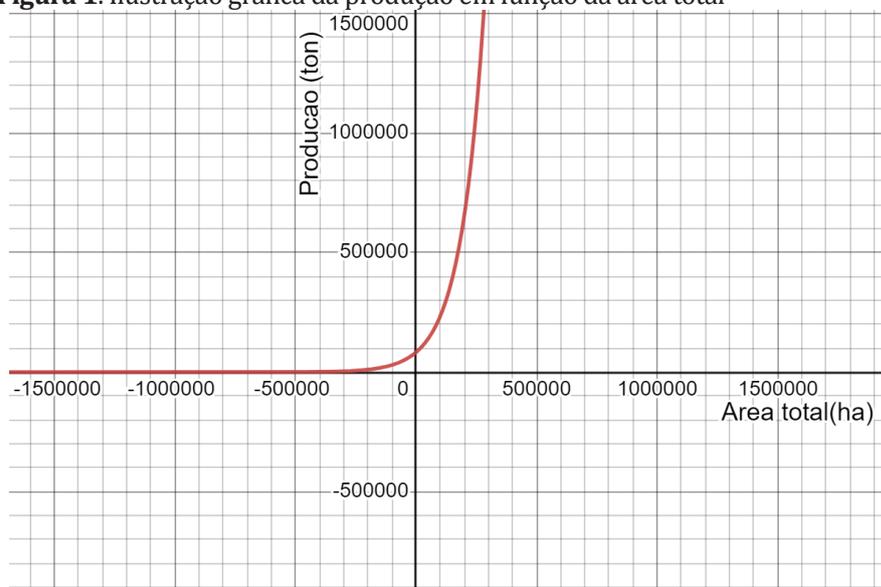
Para encontrar o ponto crítico, igualamos a derivada a zero e resolvemos para Área:

$$\frac{d}{d\text{área}} \text{Produção} = 82930.638 * 1.032 \times 10^{-5} * e^{(1.032 \times 10^{-5} * \text{Área Total})} = 0$$

Como a derivada e o factor 1.032×10^{-5} são sempre positivos, a única maneira da derivada ser igual a zero é quando $e^{(1.032 \times 10^{-5} * \text{Área Total})} = 0$.

No entanto, a função exponencial nunca é igual a zero para nenhum valor real de Área. Portanto, neste caso, não há pontos críticos para encontrar. A derivada nunca é zero, e a produção aumenta exponencialmente com a área sem alcançar um máximo local. Graficamente, a produção em função da área total é ilustrada na figura 1 abaixo:

Figura 1. Ilustração gráfica da produção em função da área total



Fonte: Autor (Resultados da Pesquisa)

A função exponencial descreve a relação entre a área e a produção gera uma curva crescente, o que significa que a produção aumenta rapidamente com o aumento da variável de entrada, que, neste caso, é a área. Essa tendência é devido à natureza exponencial da função, onde a base da exponenciação é maior que 1.

Tal como ressalta Gonçalves (2012), as funções exponenciais crescentes em \mathbb{R} não têm um limite superior definido. Na abordagem em questão, isso indica que, a produção continuará a aumentar à medida que a área aumenta, sem atingir um valor máximo. A sensibilidade à taxa de crescimento da produção em relação à área é determinada pelo coeficiente b_1 na equação exponencial. Com b_1 positivo, a produção aumentará exponencialmente com a área, refletindo

a rápida aceleração do crescimento.

Em um cenário onde a área de plantio é limitada, o modelo exponencial sugere que a produção continuará a aumentar à medida que a área cresce, sem atingir um limite máximo teórico. No entanto, se estabelecermos uma limitação prática na área de plantio, por exemplo, fixando um valor máximo de 500 hectares, a produção máxima possível pode ser estimada a partir da equação do modelo exponencial.

Para ilustrar, se a função de produção é dada por:

$$\text{Produção} = 82930.638 * e^{(1.032 \times 10^{-2} * \text{Área Total})}$$

Ao limitar a área total a 500 hectares, a produção máxima seria calculada como:

$$\text{Produção} = 82930.638 * e^{(1.032 \times 10^{-2} * 500)} \quad \text{que é igual aproximadamente} \\ 83345 \text{ toneladas.}$$

Esse cálculo demonstra que, mesmo com uma área limitada, a produção continua a aumentar de maneira exponencial. Contudo, é importante ressaltar que na realidade, outros fatores como clima, solo e eficiência do uso de recursos imporiam limites adicionais ao crescimento contínuo da produção.

Limitações do Modelo e Aperfeiçoamento

Ao considerar o modelo exponencial para a relação entre a área e a produção, observa-se que a função permite uma produção significativa mesmo quando a área é zero e mostra alguns valores da produção mesmo quando a área é teoricamente negativa, o que pode ser discordante com a realidade.

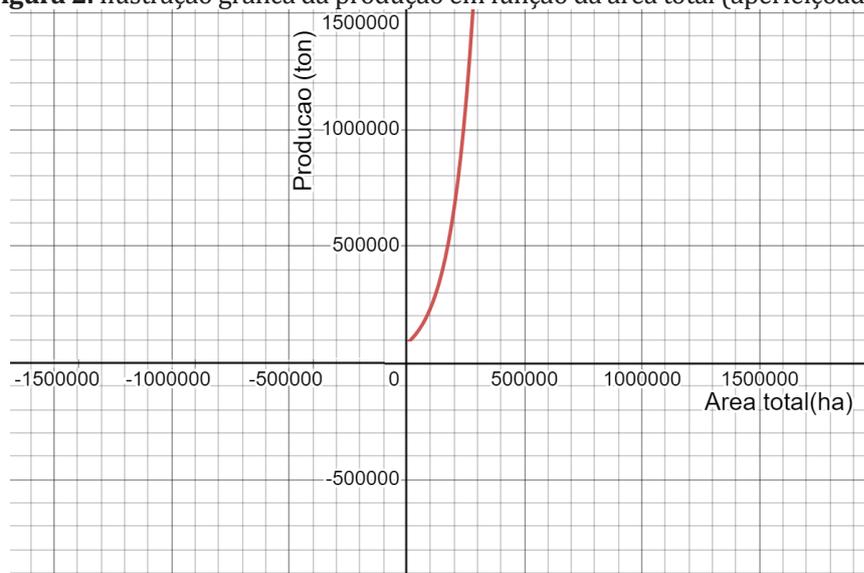
Para contornar essa discrepância, foram exploradas ajustes na função (eq1) definindo que a área apenas assume valores positivos (eq2).

$$\text{Produção} = 82930.638 * e^{(1.032 \times 10^{-2} * \text{Área Total}), \text{ área total} > 0} \quad (\text{eq2})$$

Neste sentido, a equação 2 representa a função da produção (em toneladas) em relação a área total em hectares) que também não admite um valor que maximiza a produção, ilustrando neste sentido um crescimento exponencial da produção na medida em que a área total aumenta.

Com o ajuste na equação para considerar a restrição área > 0, a função exponencial resultante (figura 2) ainda é uma curva crescente, pois a exponenciação continua sendo a base da função. A principal diferença é que a função agora é válida apenas para valores de área maiores que zero.

Figura 2. Ilustração gráfica da produção em função da área total (aperfeiçoado)



Fonte: Autor (Resultados da Pesquisa)

De forma semelhante com a interpretação da figura 1, a função produção em relação a área total possui uma curva exponencial ascendente começando a partir de área = 0, mas agora restringida a área > 0. A função ainda não tem um limite superior definido, o que significa que teoricamente a produção continuará a aumentar à medida que a área aumenta, mas agora esse comportamento é válido apenas para áreas positivas.

Outra limitação deste modelo é a consideração da área de plantio como única variável determinante da produção agrícola. Fatores como o tipo de grão, o clima, o solo, a mão-de-obra e o uso de maquinário não foram diretamente incorporados. Supõe-se que essas variáveis sejam homogêneas, com todas as áreas sendo cultivadas de forma similar. Estudos futuros poderão refinar o modelo incluindo esses e outros fatores que afetam a produção.

Conclusão ou considerações finais

O estudo desenvolveu um modelo matemático para analisar a relação entre a área de plantio e a produção agrícola no distrito de Angónia. O modelo exponencial se destacou, explicando aproximadamente 98,4% da variação nos dados. Os resultados indicaram que a produção agrícola cresce exponencialmente à medida que a área de plantio aumenta. No entanto, o modelo considerou apenas a área de plantio, assumindo que fatores como clima, tipo de grão e uso de maquinário são homogêneos. Portanto, futuras pesquisas podem integrar essas variáveis para uma análise mais abrangente.

Referências

Costa, A. F.; Pereira, J. R.; Sousa, L. P. **Análise da produtividade em função da área plantada de milho em diferentes regiões.** Revista brasileira de agricultura, v. 18, n. 2, p. 215-225, 2022.

Gonçalves, V. G. **Função exponencial.** 2012. Disponível em: <https://canal.cecierj.edu.br/012016/dd9237178e1215c3407a0f6043b403c2.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2023.

Leal, P. C. **Um estudo sobre a otimização de funções reais de variáveis reais: teoria e aplicações.** 2017. Dissertação de Mestrado em Matemática. Instituto de Ciências Matemáticas e Computação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

Mendes, F. D.; Almeida, R. S. **Modelagem matemática aplicada à agricultura: uma revisão dos principais métodos.** Journal of agricultural science, v. 11, n. 3, p. 345-357, 2023.

Minitab blog editor (MBE). **Análise de regressão: como interpretar o R-quadrado e avaliar a qualidade de ajuste?** 2019. Disponível em: <https://blog.minitab.com/pt/analise-de-regressao-como-interpretar-o-r-quadrado-e-avaliar-a-qualidade-de-ajuste>. Acesso em: 01 dez. 2023.

Silva, R. L.; Martins, G. A.; Fernandes, T. P. **Impacto da área plantada na rentabilidade de culturas: uma análise empírica.** Agricultural economics review, v. 29, n. 4, p. 456-470, 2021.

Recebido em 08 de outubro de 2024.

Aceito em 30 de dezembro de 2024.