UMA NOVA IDENTIDADE PARA MÚLTIPLOS DE π

A NEW IDENTITY FOR MULTIPLES OF π

Marcelo Oliveira Ribeiro1

Resumo: Neste artigo, com o uso de alguns resultados relacionados à função gama, mostramos que certos múltiplos complexos de podem ser escritos como um produto infinito, o que fornece uma nova identidade para tais múltiplos.

Palavras-chave: Identidade. Múltiplos de . Produto infinito.

Abstract: In this paper, using some results related to the gamma function, we show that certain complex multiples of π can be written as an infinite product, which provides a new identity for such multiples.

Keywords: Identity. Multiples of . Infinite product.

1 - Doutor em Matemática pela Universidade de Brasília (UnB). Professor da Universidade Federal do Maranhão. Lattes: http://lattes.cnpq.br/9356055872803647. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1684-3227. E-mail: marcelo.or@ufma.br

Introdução

A razão entre o comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro é representada pela letra grega , cujo valor na forma decimal é aproximadamente 3,14159. Esse número tem sido objeto de estudo dos matemáticos ao longo dos séculos e é, sem dúvida, uma das constantes mais fundamentais da Matemática. Em 1761, Lambert provou que é um número irracional, ou seja, não pode ser escrito sob forma de fração.

Pelo fato de ser um número irracional não existe nenhum padrão entre os dígitos de sua representação decimal, razão pela qual matemáticos sempre se preocuparam em determinar os dígitos de para milhões (e muito mais que isso) de casas decimais. O grande matemático Ramanujan, por exemplo, desenvolveu formas excepcionalmente eficientes de calcular , o que posteriormente foi usado em algoritmos computacionais. No início do século 21, computadores já conseguiam calcular para trilhões de casas decimais.

Outras descobertas envolvendo ocorreram, entre elas, o desenvolvimento de fórmulas que produzem (ou múltiplos de) através de integrais, séries infinitas ou produtos infinitos:

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \pi$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right) = \pi$ (Fórmula de Borwein-Plouffe)
- $2 \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}\right) = \pi$ (Produto de Wallis)

Uma questão natural surge à luz do produto de Wallis (LITTLE; TEO; VAN BRUNT, 2021): existiria alguma fórmula envolvendo um produto infinito que gere múltiplos de ? Mais adiante veremos que sim.

O objetivo deste artigo é provar uma fórmula que gera certos múltiplos complexos de . Mais precisamente, provamos o

Teorema 1. *Seja um número complexo diferente de qualquer número inteiro. Então vale a identidade*

$$\pi\alpha = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+\alpha)^{-1}(n-1+\alpha)4n^2}{4n^2-4n+1}.$$

Resultados auxiliares

Nesta seção iremos apresentar os resultados que são os ingredientes essenciais na prova do nosso teorema. Mas antes, relembremos a definição da função gama.

Definição 1. *Seja um número complexo com Re(z)>0. A função gama é definida por*

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} \cdot e^{-t} dt.$$

A função gama possui algumas propriedades extremamente úteis, a saber:

1) $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$ (Equação funcional)
2) $\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sen\ \pi z}$ $(z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

Existem diversas formas de representar a função gama. Para o nosso propósito, a mais conveniente consta no resultado seguinte:

Proposição 1. *Para todo número complexo* $z \notin \{0, -1, -2, -3, \dots\}$, *temos*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\left\{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}\right\},$$

onde y é a constante de Euler-Mascheroni.
Demonstração. Veja (WHITTAKER; WATSON, 2020).

A Proposição 1 é utilizada para provar diversos resultados importantes relacionados à função gama, um deles, em particular, será necessário para demonstrar o Teorema 1. Embora seja uma consequência do resultado anterior, iremos enunciá-lo como um lema.

Lema 1. *Consideremos* a_1, a_2, b_1 *e* b_2 números complexos não nulos, *tais que* *Se b1,b2* $\notin$ *{-1-2-3,...\}.*

$$\sum_{k=1}^{2} a_k = \sum_{k=1}^{2} b_k,$$

Então

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(a_1+k)(a_2+k)}{(b_1+k)(b_2+k)} = \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}\cdot\frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}.$$

Demonstração. Veja (WHITTAKER; WATSON, 2020).

Outro resultado que precisaremos para a nossa demonstração é a fórmula de Euler para a função seno (CHEN, 2021):

Lema 2. *Se* $\omega \in \mathbb{C}$ *então vale a seguinte identidade*

$$sen\omega = \omega\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\omega^2}{n^2\pi^2}\right). \qquad (1)$$

Demonstração. Veja (WHITTAKER; WATSON, 2020).

Demonstração do Teorema 1

De posse dos lemas 1 e 2, faremos algumas manipulações algébricas, a fim de provar a identidade mencionada no Teorema 1. Primeiramente, iremos provar a seguinte afirmação: para cada número complexo não nulo , que seja diferente de qualquer inteiro negativo, temos

$$sen(\pi\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1+\alpha)(n-\alpha)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}. \qquad (1)$$

De fato, pelo Lema 1, sabemos que

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(a_1+k)(a_2+k)}{(b_1+k)(b_2+k)}=\frac{b_1b_2}{a_1a_2}\cdot\frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)},\tag{3}$$

onde $a_1+a_2=b_1+b_2$, com a_1,a_2,b_1,b_2 satisfazendo as condições do Lema 1. Pondo então , $a_1=-1+\alpha$, $\alpha_2=-\alpha$ e $b_1=b_2=-1/2$ e em (3) e usando as propriedades 1) e 2) da função gama, que foram mostradas na seção anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1+\alpha)(n-\alpha)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}&=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{(-1+\alpha)(-\alpha)}\cdot\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-1+\alpha)\Gamma(-\alpha)}\\&=\frac{1}{4(-1+\alpha)(-\alpha)}\cdot\frac{4\pi}{\Gamma(-1+\alpha)\Gamma(-\alpha)}\\&=\frac{\pi}{\Gamma\big(1+(-1+\alpha)\big)\Gamma(1-\alpha)}\end{aligned}$$

Agora, usando $\omega=\pi\alpha$ na identidade do Lema 2, temos

$$\begin{aligned}\frac{sen\ (\pi\alpha)}{\pi\alpha}&=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right)\\&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+\alpha)(n-\alpha)}{n^2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\pi\alpha=sen(\pi\alpha)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+\alpha)(n-\alpha)},\tag{4}$$

desde que não seja um número inteiro. Finalmente, substituindo (2) em (4) temos que

$$\begin{aligned}\pi\alpha&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1+\alpha)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n-\alpha)(n+\alpha)}\\&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\frac{(n-1+\alpha)}{(n-\alpha)(n+\alpha)},\end{aligned}$$

Donde concluímos que

$$\pi\alpha=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+\alpha)^{-1}(n-1+\alpha)4n^2}{4n^2-4n+1},$$

o que encerra a demonstração.

Considerações Finais

A busca por identidades relacionadas ao número tem sido uma atividade constante realizada pelos matemáticos. Nesse contexto, este trabalho tem como objetivo contribuir com as fórmulas já existentes. Para isso, usamos fortemente a função gama, alguns resultados correlatos e recorremos a manipulações algébricas para desenvolver o teorema demonstrado.

Referências

CHEN, H. **Monthly Problem Gems**. 1. ed. New York: A K Peters/CRC Press, 2021.

LITTLE, C. H. C.; TEO, K. L.; VAN BRUNT, B. **An Introduction to Infinite Products**. New York: Springer, 2021.

WHITTAKER, E. T.; WATSON, G. N. **A Course of Modern Analysis**. 3. ed. New York: Dover Publications, 2020.

Recebido em 06 de fevereiro de 2024.
Aceito em 30 de abril de 2025.