ALGUNS RESULTADOS EM DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO QUATERNIÔNICA

SOME RESULTS IN QUATERNIONIC DERIVATION AND INTEGRATION

Geilson Mendes dos Reis1
José Antônio Pires Ferreira Marão 2

Resumo: Desde a formalização da álgebra dos números complexos, em 1833, por Willian Rowan Hamilton, muitas foram as tentativas de generalização dos resultados da Análise Complexa para a Análise Quaterniônica. Recentemente, alguns resultados análogos aos verificados na Análise Complexa foram demonstrados. Cabe citar aqui a generalização das Equações de Cauchy-Riemann e a Fórmula integral de Cauchy para o caso quaterniônico. As Funções Quaterniônicas admitem derivadas à direita e à esquerda, mas elas nem sempre são iguais e, com isso, ao longo do trabalho será demonstrado que se uma função satisfaz as equações de Cauchy-Riemann generalizadas, então as suas derivadas segundas à esquerda e à direita são iguais.

Palavras-chave: Análise Quaterniônica. Equações de Cauchy-Riemann Generalizadas. Derivada Quaterniônica Segunda.

Abstract: Since the formalization of the algebra of complex numbers, in 1833, by Willian Rowan Hamilton, there have been many attemps to generalize the results of Complex Analysis to Quaternion Analysis. Recently, some results similar to those verified in the Complex Analysis were demonstrated. It is worth mentioning here the generalization of the Cauchy-Riemann equations and the Cauchy integral formula for the quaternionic case. Quaternion functions admit right and left derivatives, but day are not always the same and, therefore, throughout the work it will be shown that if a function satisfies the generalized Cauchy-Riemann equations, then its left and right second derivatives are the same.

Keywords: Quaternion. Complex Analysis. Quaternionic Derivation and Integration.

1- Possui Graduação em Matemática pela Universidade Federal do Maranhão (UFMA-2013); Mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Maranhão (UFMA-2015); Especialização em Análise Numérica na Dinâmica Combinatória (Faculdade Unyleya-2021); Professor da Universidade Estadual do Maranhão (DEMATI-UEMA). Lattes: http://lattes.cnpq.br/0426866557350159. E-mail: geilsonreis@professor.uema.br.

2- Possui Graduação em Matemática pela Universidade Federal do Maranhão (UFMA-2004); Mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Lattes (UNESP-2007); Doutorado em Física Matemática pela Universidade de Brasília (Unb-2011). Professor da Universidade Estadual e Federal do Maranhão. Lattes: http://lattes.cnpq.br/450176186399744. E-mail: jose.marao@ufma.br.

Introdução

Depois de formalizar a teoria de números complexos em 1833, Hamilton tentou estender a teoria para três dimensões, partindo de um número complexo, $a + bi$, para ternas ordenadas do tipo $a + bi + cj$. Entretanto, ele não conseguiu definir uma multiplicação que obedecessem à regra já conhecida para Números Complexos (OLIVEIRA, 2006).

Hamilton percebeu que o problema da multiplicação das ternas não podia ser resolvido o que o levou a pensar no problema utilizando quatro números, isto é, formando números da forma $a + bi + cj + dk$, que foram chamados de Quatérnios, o que culminou na obtenção da seguinte regra $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Com essa regra de multiplicação foi possível construir uma detalhada teoria de um sistema algébrico não comutativo que constituiu o primeiro exemplo de anel não comutativo com divisão (OLIVEIRA, 2006).

O desenvolvimento da Teoria dos Quatérnios estimulou sucessivas investigações e aplicações em outras áreas do conhecimento. Os Quatérnios foram usados, por exemplo, na determinação das equações do eletromagnetismo, por James Clerk Maxwell.

Nos últimos anos alguns resultados em derivação e integração, próprios da Análise Complexa, foram generalizados para a Análise Quaterniônica (BORGES, MACHADO, 2002). Entretanto, essa teoria ainda tem muitas lacunas e resultados novos vem sendo determinados.

Este artigo se propõe a mostrar a comutatividade das derivadas quaterniônicas à direita e à esquerda sob a condição de que a função quaterniônica satisfaça as equações de Cauchy-Riemann e em seguida, concluir, a partir disso, que a derivada à direita e a derivada à esquerda são funções constantes.

Derivada e integração quaterniônica

Conforme Borges, Figueiredo e Marão (2012), dada uma função quaterniônica f, foram definidas duas integrais $\int f\ dz$ e $\int dz\ f$:

$$\int f\,dz = \int (f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4)\,(dq_1 + idq_2 + jdq_3 + kdq_4)$$

$$= \int (f_1dq_1 - f_2dq_2 - f_3dq_3 - f_4dq_4) +$$

$$+ \int (f_2dq_1 + f_1dq_2 - f_4dq_3 + f_3dq_4)\,i$$

$$+ \int (f_3dq_1 + f_4dq_2 + f_1dq_3 - f_2dq_4)\,j$$

$$+ \int (f_4dq_1 - f_3dq_2 + f_2dq_3 + f_1dq_4)\,k$$

e

$$\int dz\,f = \int (dq_1 + idq_2 + jdq_3 + kdq_4)(f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4)$$

$$= \int (dq_1f_1 - dq_2f_2 - dq_3f_3 - dq_4f_4) +$$

$$+ \int (dq_1f_2 + dq_2f_1 + dq_3f_4 - dq_4f_3)\,i$$

$$+ \int (dq_1f_3 - dq_2f_4 + dq_3f_1 + dq_4f_2)\,j$$

$$+\int (dq_1 f_4 + dq_2 f_3 - dq_3 f_2 + dq_4 f_1)\,k$$

As funções coordenadas $f_i, i = 0{,}1{,}2{,}3$, representam um caminho que vai do ponto $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ até o ponto $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ em um domínio simplesmente conexo do espaço quadridimensional, já as integrais $\int f\,dz$ e $\int dz\,f$ independem do caminho com as condições dos seguintes teoremas:

Teorema 1: Para todo par de pontos a e b, e qualquer caminho ligando-os em um espaço simplesmente conexo quadridimensional, a integral $\int f\,dz$ independe do caminho dado se, e somente se, existe uma função $F = F_1 + iF_2 + jF_3 + kF_4$, com $\int_a^b f\,dz$ e satisfaz as seguintes relações:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial F_1}{\partial q_1} = \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = \frac{\partial F_3}{\partial q_3} = \frac{\partial F_4}{\partial q_4} \\
\frac{\partial F_2}{\partial q_1} = \frac{-\partial F_1}{\partial q_2} = \frac{\partial F_4}{\partial q_3} = \frac{-\partial F_3}{\partial q_4} \\
\frac{\partial F_3}{\partial q_1} = \frac{-\partial F_4}{\partial q_2} = \frac{-\partial F_1}{\partial q_3} = \frac{\partial F_2}{\partial q_4} \\
\frac{\partial F_4}{\partial q_1} = \frac{\partial F_3}{\partial q_2} = \frac{-\partial F_2}{\partial q_3} = \frac{-\partial F_1}{\partial q_4}
\end{gathered} \tag{1}$$

Demonstração: A integral $\int_a^b f\,dz$ independerá do caminho se existir uma função F F tal que

$$\int_a^b f\,dq = \int_a^b dF = \int_a^b d(F_1 + iF_2 + jF_3 + kF_4) = F(b) - F(a).$$

Supondo então que a função F exista, temos que as diferenciais totais de suas funções coordenadas são dadas por:

$$\begin{gathered}
dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial F_1}{\partial q_2}dq_1 + \frac{\partial F_1}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial F_1}{\partial q_4}dq_4 \\
f_1 dq_1 - f_2 dq_2 - f_3 dq_3 - f_4 dq_4 \\
dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial F_2}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial F_2}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial F_2}{\partial q_4}dq_4 \\
f_2 dq_1 + f_1 dq_2 - f_4 dq_3 + f_3 dq_4 \\
dF_3 = \frac{\partial F_3}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial F_3}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial F_3}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial F_3}{\partial q_4}dq_4 \\
f_3 dq_1 + f_4 dq_2 + f_1 dq_3 - f_2 dq_4 \\
dF_4 = \frac{\partial F_4}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial F_4}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial F_4}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial F_4}{\partial q_4}dq_4 \\
f_4 dq_1 - f_3 dq_2 + f_2 dq_3 + f_1 dq_4
\end{gathered}$$

Resultam disso as relações:

$$f_1 = \frac{\partial F_1}{\partial q_1} = \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = \frac{\partial F_3}{\partial q_3} = \frac{\partial F_4}{\partial q_4}$$

$$f_2 = \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = \frac{-\partial F_1}{\partial q_2} = \frac{\partial F_4}{\partial q_3} = \frac{-\partial F_3}{\partial q_4}$$
$$f_3 = \frac{\partial F_3}{\partial q_1} = \frac{-\partial F_4}{\partial q_2} = \frac{-\partial F_1}{\partial q_3} = \frac{\partial F_2}{\partial q_4}$$
$$f_4 = \frac{\partial F_4}{\partial q_1} = \frac{\partial F_3}{\partial q_2} = \frac{-\partial F_2}{\partial q_3} = \frac{-\partial F_1}{\partial q_4}$$

concluindo a demonstração.

Teorema 2: Para todo par de pontos a e b, e qualquer caminho ligando-os em um espaço simplesmente conexo quadridimensional, a integral $\int dq\, f$ independente do caminho dado se, e somente se, existe uma função $G = G_1 + iG_2 + jG_3 + kG_4$, com $\int_a^b f\, dq = G(b) - G(a)$ e satisfaz as seguintes relações:

$$\frac{\partial G_1}{\partial q_1} = \frac{\partial G_2}{\partial q_2} = \frac{\partial G_3}{\partial q_3} = \frac{\partial G_4}{\partial q_4}$$
$$\frac{\partial G_2}{\partial q_1} = \frac{-\partial G_1}{\partial q_2} = \frac{-\partial G_4}{\partial q_3} = \frac{\partial G_3}{\partial q_4}$$
$$\frac{\partial G_3}{\partial q_1} = \frac{\partial G_4}{\partial q_2} = \frac{-\partial G_1}{\partial q_3} = \frac{-\partial G_2}{\partial q_4}$$
$$\frac{\partial G_4}{\partial q_1} = \frac{-\partial G_3}{\partial q_2} = \frac{\partial G_2}{\partial q_3} = \frac{-\partial G_1}{\partial q_4} \qquad (2)$$

Demonstração: A prova é análoga à demonstração do Teorema 1.

Observe que as equações (1) e (2) caracterizam um análogo às condições de Cauchy-Riemann conhecidas da Análise Complexa Clássica e são chamadas de Equações de Cauchy-Riemann Generalizadas.

Considere as funções h e g definidas em termos da função quaterniônica f cujas coordenadas obedecem às condições de Cauchy-Riemann Generalizadas (1) e (2).

$$h(q) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3} + \frac{\partial f_4}{\partial q_4}\right) + i.\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1}{\partial q_2} + \frac{\partial f_4}{\partial q_3} - \frac{\partial f_3}{\partial q_4}\right) \\ +j.\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1} - \frac{\partial f_4}{\partial q_2} - \frac{\partial f_1}{\partial q_3} + \frac{\partial f_2}{\partial q_4}\right) + k.\left(\frac{\partial f_4}{\partial q_1} + \frac{\partial f_3}{\partial q_2} - \frac{\partial f_2}{\partial q_3} - \frac{\partial f_1}{\partial q_4}\right) \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$g(q) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3} + \frac{\partial f_4}{\partial q_4}\right) + i.\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1}{\partial q_2} - \frac{\partial f_4}{\partial q_3} + \frac{\partial f_3}{\partial q_4}\right) \\ +j.\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1} + \frac{\partial f_4}{\partial q_2} - \frac{\partial f_1}{\partial q_3} - \frac{\partial f_2}{\partial q_4}\right) + k.\left(\frac{\partial f_4}{\partial q_1} - \frac{\partial f_3}{\partial q_2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_3} - \frac{\partial f_1}{\partial q_4}\right) \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

As funções h e g são chamadas de derivada à esquerda e à direita da função quaterniônica f, respectivamente. Os autores MACHADO e BORGES (2002) demonstraram que

$$\int h\, dq = f \text{ e } \int dq\, g = f.$$

Derivadas sucessivas de uma função de uma variável quaterniônica

As funções h e g dadas em (3) e (4), respectivamente, também possuem suas derivadas à esquerda e à direita. A derivada quaterniônica segunda à direita e à esquerda de uma função quaterniônica ff são definidas, respectivamente, por

$$h_1(q)=\frac{d^2f_l(q)}{dq^2}h_1(q)=\frac{d^2f_l(q)}{dq^2} \quad \text{e} \quad g_1(q)=\frac{d^2f_r(q)}{dq^2}g_1(q)=\frac{d^2f_r(q)}{dq^2}.$$

Derivando hh à esquerda, tem-se:

$$h_1(q)=\frac{d^2f_l(q)}{dq^2}=\frac{d}{dq}\left(\frac{df_l(q)}{dq}\right)=\frac{dh(q)}{dq}.$$

A partir das coordenadas de $h(q)h(q)$, calcula-se $h_1(q)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
h_1(q)=\frac{1}{16}\Bigg[&\Bigg(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3}+\frac{\partial f_4}{\partial q_4}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}-\frac{\partial f_1}{\partial q_2}+\frac{\partial f_4}{\partial q_3}-\frac{\partial f_3}{\partial q_4}\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}-\frac{\partial f_4}{\partial q_2}-\frac{\partial f_1}{\partial q_3}+\frac{\partial f_2}{\partial q_4}\right)+\frac{\partial}{\partial q_4}\left(\frac{\partial f_4}{\partial q_1}+\frac{\partial f_3}{\partial q_2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_3}-\frac{\partial f_1}{\partial q_4}\right)\Bigg)\\
&+i.\Bigg(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}-\frac{\partial f_1}{\partial q_2}+\frac{\partial f_4}{\partial q_3}-\frac{\partial f_3}{\partial q_4}\right)-\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3}+\frac{\partial f_4}{\partial q_4}\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_4}{\partial q_1}+\frac{\partial f_3}{\partial q_2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_3}-\frac{\partial f_1}{\partial q_4}\right)-\frac{\partial}{\partial q_4}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}-\frac{\partial f_4}{\partial q_2}-\frac{\partial f_1}{\partial q_3}+\frac{\partial f_2}{\partial q_4}\right)\Bigg)\\
&+j.\Bigg(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}-\frac{\partial f_4}{\partial q_2}-\frac{\partial f_1}{\partial q_3}+\frac{\partial f_2}{\partial q_4}\right)-\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_4}{\partial q_1}+\frac{\partial f_3}{\partial q_2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_3}-\frac{\partial f_1}{\partial q_4}\right)\\
&-\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3}+\frac{\partial f_4}{\partial q_4}\right)-\frac{\partial}{\partial q_4}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}-\frac{\partial f_1}{\partial q_2}+\frac{\partial f_4}{\partial q_3}-\frac{\partial f_3}{\partial q_4}\right)\Bigg)\\
&+k.\Bigg(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_4}{\partial q_1}+\frac{\partial f_3}{\partial q_2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_3}-\frac{\partial f_1}{\partial q_4}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}-\frac{\partial f_4}{\partial q_2}-\frac{\partial f_1}{\partial q_3}+\frac{\partial f_2}{\partial q_4}\right)\\
&-\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}-\frac{\partial f_1}{\partial q_2}+\frac{\partial f_4}{\partial q_3}-\frac{\partial f_3}{\partial q_4}\right)-\frac{\partial}{\partial q_4}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3}+\frac{\partial f_4}{\partial q_4}\right)\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}$$

Fazendo os cálculos e agrupando os termos é imediato que:

$$\begin{aligned}
h_1(q)=\frac{1}{16}\Bigg[&\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial {q_1}^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial {q_2}^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial {q_3}^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial {q_4}^2}+2.\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_3}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_4}\right)\right)\\
&+i.\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial {q_1}^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial {q_2}^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial {q_3}^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial {q_4}^2}+2.\left(\frac{-\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1\partial q_3}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_4}\right)\right)\\
&+j.\left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial {q_1}^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial {q_2}^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial {q_3}^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial {q_4}^2}+2.\left(\frac{-\partial^2 f_4}{\partial q_1\partial q_2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_3}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_4}\right)\right)\\
&+k.\left(\frac{\partial^2 f_4}{\partial {q_1}^2}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial {q_2}^2}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial {q_3}^2}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial {q_4}^2}+2.\left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_3}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_4}\right)\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

Derivando parcialmente todos os membros das igualdades em (1) e utilizando as condições de Cauchy-Riemann generalizadas, são obtidas as igualdades:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial {q_1}^2}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_2}=\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_3}=\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1\partial q_4}$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial {q_1}^2} = \frac{-\partial^2 f_1}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1 \partial q_3} = \frac{-\partial^2 f_3}{\partial q_1 \partial q_4}$$
$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial {q_1}^2} = \frac{-\partial^2 f_4}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{-\partial^2 f_1}{\partial q_1 \partial q_3} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1 \partial q_4}$$

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial {q_1}^2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{-\partial^2 f_2}{\partial q_1 \partial q_3} = \frac{-\partial^2 f_4}{\partial q_1 \partial q_4}.$$

Aplicando essas igualdades em (5) tem-se:

$$h_1(q) = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} \left(7\frac{\partial^2 f_1}{\partial {q_1}^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial {q_2}^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial {q_3}^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial {q_4}^2}\right) + \\ i.\left(7\frac{\partial^2 f_2}{\partial {q_1}^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial {q_2}^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial {q_3}^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial {q_4}^2}\right) + \\ j.\left(7\frac{\partial^2 f_3}{\partial {q_1}^2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial {q_2}^2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial {q_3}^2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial {q_4}^2}\right) + \\ k.\left(7\frac{\partial^2 f_4}{\partial {q_1}^2} - \frac{\partial^2 f_4}{\partial {q_2}^2} - \frac{\partial^2 f_4}{\partial {q_3}^2} - \frac{\partial^2 f_4}{\partial {q_4}^2}\right) \end{bmatrix}$$

Por fim, derivando parcialmente as igualdades em (1) decorrentes das equações de Cauchy-Riemann em relação a q_1, q_2, q_3 e q_4 obtém-se quatro sequências de igualdades abaixo que simplificam a estrutura de $h_1(q)h_1(q)$:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial {q_1}^2} = \frac{-\partial^2 f_1}{\partial {q_2}^2} = \frac{-\partial^2 f_1}{\partial {q_3}^2} = \frac{-\partial^2 f_1}{\partial {q_4}^2}$$
$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial {q_1}^2} = \frac{-\partial^2 f_2}{\partial {q_2}^2} = \frac{-\partial^2 f_2}{\partial {q_3}^2} = \frac{-\partial^2 f_2}{\partial {q_4}^2}$$
$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial {q_1}^2} = \frac{-\partial^2 f_3}{\partial {q_2}^2} = \frac{-\partial^2 f_3}{\partial {q_3}^2} = \frac{-\partial^2 f_3}{\partial {q_4}^2}$$
$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial {q_1}^2} = \frac{-\partial^2 f_4}{\partial {q_2}^2} = \frac{-\partial^2 f_4}{\partial {q_3}^2} = \frac{-\partial^2 f_4}{\partial {q_4}^2}$$

Substituindo as igualdades acima em (6) a derivada segunda à esquerda é dada pela seguinte expressão:

$$h_1(q) = \frac{10}{16}\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial {q_1}^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial {q_1}^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial {q_1}^2} + \frac{\partial^2 f_4}{\partial {q_1}^2}\right). \qquad (7)$$

Teorema 3: Se f é uma função quaterniônica que satisfaz as equações de Cauchy-Riemann generalizadas e h_1 a sua derivada quaterniônica segunda à esquerda, então

$$h_1(q) = \frac{-5}{16}(\Delta f_1 + i.\Delta f_2 + j.\Delta f_3 + k.\Delta f_4)$$

em que $\triangle$ é o operador Laplaciano.

Usando o mesmo raciocínio para a derivada quaterniônica segunda à direita o resultado obtido pode ser resumido no seguinte:

Teorema 4: Se f é uma função quaterniônica que satisfaz as equações de Cauchy-Riemann generalizadas e g_1 a sua derivada quaterniônica segunda à direita, então

$$g_1(q) = \frac{-5}{16}(\Delta f_1 + i.\Delta f_2 + j.\Delta f_3 + k.\Delta f_4)$$

em que $\triangle$ é o operador Laplaciano.

Dos Teoremas 3 e 4 é possível concluir que as derivadas quaterniônicas segundas à direita e à esquerda são iguais. Destaca-se aqui se uma Função Quaterniônica satisfaz as equações de Cauchy-Riemann generalizadas, então as suas funções coordenadas satisfazem a equação de Laplace (MARAO; BORGES, 2014). Portanto,

$$\Delta f_1 = \Delta f_2 = \Delta f_3 = \Delta f_4 = 0.$$

Dessa forma, o resultado abaixo resume o que foi feito até aqui.

Teorema 5: Uma Função Quaterniônica f que satisfaz as equações de Cauchy-Riemann generalizadas tem as suas derivadas quaterniônicas segunda à esquerda e à direita nulas.

Demonstração: Como

$$h_1(q) = g_1(q) = \frac{-5}{16}(\Delta f_1 + i.\Delta f_2 + j.\Delta f_3 + k.\Delta f_4)$$

e

$$\Delta f_1 = \Delta f_2 = \Delta f_3 = \Delta f_4 = 0\Delta f_1 = \Delta f_2 = \Delta f_3 = \Delta f_4 = 0.$$

Portanto,

$$h_1(q) = g_1(q) = 0.$$

Por fim, uma conclusão imediata, oriunda do fato de que as derivadas apresentadas nos resultados acima serem constantes, é apresentada no Teorema 6:

Teorema 6: Se f é uma função quaterniônica que satisfaz as equações de Cauchy-Riemann generalizadas, então as suas derivadas quaterniônicas segundas à esquerda e à direita são funções constantes.

Considerações Finais

Desde o surgimento dos quatérnios, o interesse em buscar generalizações de resultados da Análise Complexa tem ganhado cada vez mais espaço. Entretanto, a Análise Quaterniônica ainda não está totalmente consolidada, um exemplo disso é percebido na derivada de ordem superior para essas funções, que não possui a quantidade de resultados suficientes para concluir o que ocorre com as derivadas de ordem n, por exemplo.

Nesse contexto a contribuição do trabalho para a Análise Quaterniônica foi dada através da determinação de uma fórmula para derivações de ordem dois além da verificação de que, se a Função Quaterniônica satisfaz as Condições de Cauchy-Riemann generalizadas, então a derivada segunda à direita e a derivada segunda à esquerda são iguais, ou seja, comutam. Além disso, verificou-se que se a Função Quaterniônica satisfaz as Condições de Cauchy-Riemann generalizadas então as suas derivadas quaterniônicas à direita e à esquerda são constantes. Esses resultados certamente terão consequências importantes para a determinação de derivadas de ordem nn.

Referências

BORGES, M.F.; COELHO, J.; MARÃO, J.A.P.F. **Geometrical Logarithmic and Trigonometric Hypercomplex Functions of Quaternionic Type.** Far East Journal of Mathematical Sciences: FJMS, v.50, p. 45-53, 2011.

BORGES, M.F.; MACHADO, J.M. **New Remarks on the Differentiability of hypercomplex functions.** International Journal of Applied Mathematics, v.8, n.1, p.85-101, 2002.

BORGES, M.F.; FIGUEIREDO, A.D.; MARÃO, J.A.P.F. **Hypercomplex Geometric Derivate from a Cauchy-Like Integral Formula.** International Journal of Pure and Applied Mathematics, v.68, n.1, p. 55-69, (2011).

MARÃO, J. A. P. F., BORGES, M.F., **Geometrical Hypercomplex Coupling Between Electric and Gravitational Fields.** In: International Journal of Pure and Applied Mathematics; International Journal of Pure and Applied Mathematics, IJPAM, v.88, n.4, p. 475-482, (2013).

MARÃO, J.A.P.F.; BORGES, M.F. **A Note on the Hypercomplex Riemann-Cauchy Like Relations for Quaternions and Laplace Equations.** p.5, (2014).

OLIVEIRA, A.C. **Quatérnios, operadores de Fueter e relações quaterniônicas transcendentais.** 2006. 76 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2006.

Recebido em: 30 de novembro de 2022.
Aceito em: 20 de janeiro de 2023.