CURVAS DE BÉZIER E ALGUMAS APLICAÇÕES

BÉZIER CURVES AND A FEW APPLICATIONS

Adriano Pinho Almeida 1
Cleber Araújo Cavalcanti 2

Resumo: A presente pesquisa é voltada para o estudo matemático das curvas de Bézier, enfatizando uma abordagem para o Ensino Médio que engloba funções do segundo grau, geometria analítica, números complexos e área. Escolhemos aplicações elementares a fim de evitar longas notas técnicas. Além disso, algumas aplicações sofreram simplificações, mantendo-se a ideia central, de modo a facilitar sua introdução em turmas do Ensino Médio. Faz-se presente um resumo histórico da criação e das primeiras aplicações. Os resultados considerados, ou obtidos, possuem dedução por meio de técnicas elementares, livres do Cálculo, embora o conceito de limite esteja presente de maneira germinal. Demonstrou-se caracterizações para as curvas de Bézier definidas por dois, e por três pontos.

Palavras – chave: curvas de bézier. geometria analítica, números complexos.

Abstract: The present research is focused on the mathematical study of Bézier curves, emphasizing an approach to the teaching second degree functions, analytical geometry, complex numbers and area. We chose elementary applications to avoid long technical notes. Although, some applications have been simplified, keeping the central idea, in order to facilite their intrduction in high scholl classes. A historical summary of the creation and the first applications of the Bézier curves is presented. The results considered, or obtained, have deduction by means of elementary techniques, free from Calculus, although the limit concept is present in a germinal manner. Characterizations were demonstrated for the Bézier curves defined by two, and by three points.

Keywords: bézier curves, analytical geometry, complex numbers.

1- Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Maranhão, polo de Santa Luzia, vinculado ao Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica/PARFOR. Docente de Matemática na Unidade Integrada Abdon Braide em Santa Luzia – MA. LATTES: http://lattes.cnpq.br/2616765039034875.Orcid: https://orcid.org/0000-0002-3209-8861

2-Possui graduação em Matemática - Bacharelado pela Universidade Federal da Paraíba (2001) e mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (2003). Atualmente é Professor Assistente da Universidade Federal do Maranhão. LATTES: http://lattes.cnpq.br/2999768182717503. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-7315-7258

Introdução

O ensino de Matemática, constantemente, passa por revisões e aperfeiçoamento no que diz respeito aos conteúdos desenvolvidos em sala de aula. Planejar e ensinar alguns temas, às vezes modernos e sofisticados, mas de fácil entendimento, é uma estratégia para incentivar a curiosidade dos estudantes e despertar o interesse desses por aqueles.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em dezembro de 2018, deixa de fora os números complexos. Por outro lado, o mesmo documento abre espaço para aplicações computacionais, tanto no sentido computação-ensino, quanto no sentido ensino-computação.

Usando números complexos, a representação gráfica destes no plano Argand-Gauss, a forma polar dos números complexos, e a fórmula de Moivre, obtém-se um modo poderoso de representar e rotacionar conjuntos de pontos em um plano, incluindo-se curvas ou regiões. Além disso, pelos mesmos meios, também é possível transladar, ampliar ou diminuir as figuras geradas por esses pontos.

De maneira natural abre-se espaço para discutir o paradigma vetorial de imagens, suas vantagens de armazenamento e de manipulação. As curvas de Bézier são inseridas nesse contexto como uma forma de interpolar suavemente uma curva passando por duas extremidades fixas.

Na mesma linha, pode-se aproximar uma curva dada (analógica, bitmap, ou em outro formato, inclusive vetorial) por um caminho de curvas de Bézier. Aplicações práticas e/ou comerciais, *e.g.* construção de fontes, utilizam curvas de Bézier definidas por quatro pontos (duas extremidades e dois pontos de controle). No entanto, o tipo da curva gerada não pode ser reconhecido por um discente do Ensino Médio. Para contornar essa dificuldade e ainda assim apresentar a utilidade das curvas de Bézier para esse público, considerou-se curvas de Bézier definidas por três pontos (duas extremidades e um ponto de controle). Demonstra-se que curvas de Bézier definidas por três pontos não colineares são arcos de parábola.

Aspectos históricos

As curvas de Bézier foram desenvolvidas, independentemente, por Paul de Casteljau (1930-) e Pierre Bézier (1910-1999), no fim dos anos 1950, e aplicadas por estes, no início dos anos 1960, ao design de veículos automotivos da Citröen e da Renault, respectivamente. O grande alvo de aplicações das Curvas de Bézier nos dias atuais estão no campo da Computação Gráfica.

Segundo Gerald Farin, em seu livro, *Curves and Surfaces for CAGD* (1992, p. 02), "Citroën mantinha segredo sobre os resultados obtidos por Paul de Casteljau, no famoso relatório técnico MAC-TR-41 (por S.A. Coons) não tornar público antes de 1967". Este foi descoberto apenas na década de 70, por W. Boehm, que lhe deu o devido crédito e popularizou o nome "Algoritmo de De Casteljau". Os resultados de sua obra foram impressos apenas em 1975. Após se aposentar da Citroën, Castejau passou a publicar diversos artigos na área e em 2012 recebeu o Prêmio Bézier por suas contribuições no desenvolvimento do ramo.

Piérre Bézier, enquanto trabalhava para a Renault, também reconheceu a necessidade de se encontrar uma representação matemática adequada para modelar peças automobilísticas e carros, utilizando o computador. Nessa época, estava entrando em vigor o Controle Numérico. Tal técnica de manufatura utilizava instruções numéricas transmitidas pelo computador para controlar as máquinas de produção.

Bézier, então, reconheceu a necessidade de uma reformulação na maneira com que se fazia design. Embora partindo de uma ideia diferente da de Casteljau, Bézier chegou em uma formulação equivalente. Ele e sua equipe desenvolveram um sistema CAD chamado UNISURF, utilizado na empresa em que trabalhava.

Conforme Farin (1997)

Bézier e Casteljau desenvolveram as curvas com o intuito de modelar as formas aerodinâmicas dos automóveis modernos. Entretanto, hoje, elas têm inúmeras aplicações, principalmente em CAD – Computer Aided Design (Farin, 1997).

Esse sistema contava com curvas e superfícies como estruturas primitivas, e influenciou alguns sistemas posteriores. Aquelas superfícies também ficaram conhecidas com o sufixo de Bézier.

Curvas de Bézier: Propriedades

Cabe ao professor de Matemática da era digital sair da zona de conforto para entrar em um novo campo de estratégias metodológicas, pois os estudantes, principalmente nos anos finais do ensino fundamental, do século XXI estão cada dia mais conectados aos celulares, tablets e computadores.

A Matemática precisa ser trabalhada de modo a fomentar a coletividade entre os estudantes, primando pela cooperação na busca de soluções para os questionamentos surgidos na interação durante discussões, em que cada um desenvolve a capacidade de expor seus pensamentos, de forma consensual, acerca dos problemas matemáticos propostos.

Assim, conforme a BNCC (BRASIL 2018), o professor estimula a cooperação entre os estudantes e com ele mesmo, confrontando as ideias sem desrespeitá-las, gerando uma forma de aprendizagem significativa. Conforme MARANHÃO (2019, p.308), o estudante deve ter a capacidade de comunicar-se matematicamente, descrevendo, representando e apresentando resultados a partir do desenvolvimento de pesquisas e discussões sobre as diferentes representações matemáticas, além de se sentir seguro na construção do conhecimento matemático, desenvolvendo-o a partir do respeito mútuo no modo de pensar e de aprender de cada um.

Geralmente, o tema "Curvas de Bézier" é abordado em outras áreas de estudo como a engenharia mecânica e mecatrônica, computação gráfica, em design de produtos, arquitetura, entre outros, devido à grande contribuição que essa ferramenta tem nessas áreas. A maioria dos softwares de computação gráfica usa o conceito de Curvas de Bézier.

As curvas de Bézier são definidas por meio dos polinômios de Bernstein. Esses polinômios são lembrados no contexto da Análise Matemática, como pode-se observar em RUDIN (1976), por sua aplicação em uma bem conhecida demonstração concreta do Teorema de Aproximação de Stone-Weierstrass, o qual estabelece que toda função contínua definida sobre um intervalo compacto pode ser aproximada uniformemente por uma sequência de funções polinomiais, dada por Bernstein em 1912.

DEFINIÇÃO: Define-se a curva de Bézier associada aos pontos de controle $P_0 = (x_0, y_0) = x_0 + i \cdot y_0$, $P_1 = (x_1, y_1) = x_1 + i \cdot y_1, \ldots,$ $P_N = (x_N, y_N) = x_N + i \cdot y_N$, nessa ordem, como sendo

$$B_N = \sum_{k=0}^{N} b_{k,N}(t) \cdot P_k = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (1-t)^{N-t} \cdot t^k \cdot P_k$$

para $t \in [0,1]$, na qual as funções $b_{N,k} = \binom{N}{k}(1-t)^{N-k} \cdot t^k$ são os polinômios de Bernstein de grau N, que por sua vez, formam uma base para os polinômios de grau N.

Observe-se que os pontos de controle foram apresentados tanto sob a forma de pares ordenados do $\mathbb{R}^2$, quanto sob a forma de números em $\mathbb{C}$, pois pode-se geometricamente identificar esses conjuntos. Ambas as formas serão, em momentos adequados, úteis.

Observe-se ainda que uma Curva de Bézier passa pelo ponto de controle P_0 quando $t = 0$ (usa-se a convenção $0^0 = 1$, se necessário), e pelo ponto de controle P_N

quando $t = 1$ (usa-se a convenção $0^0 = 1$, se necessário), e fica confinada ao fecho convexo (ou envoltória convexa) dos pontos de controle.

Sendo assim, emprega-se no mínimo dois pontos em sua definição, podendo ter qualquer número natural $N \geq 2$ pontos de controle.

TEOREMA: Considere uma curva de Bézier dada por dois pontos de controle $P_0 = (x_0, y_0) = x_0 + i \cdot y_0$ e $P_1 = (x_1, y_1) = x_1 + i \cdot y_1$ distintos (portanto $x_0 \neq x_1$ ou $y_0 \neq y_1$) então a curva de Bézier

$$t \in [0,1] \mapsto B_1(t) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} (1-t)^{1-k} \cdot t^k \cdot P_k = (1-t) \cdot P_0 + t \cdot P_1$$

representa um segmento de reta.

Demonstração: A curva $t \in [0,1] \mapsto B_1(t) = (1-t) \cdot P_0 + t \cdot \mathrm{P}_1$, separando-se a parte real e imaginária, é igual a

$$t \in [0,1] \mapsto B_1(t) = (1-t) \cdot P_0 + t \cdot \mathrm{P}_1 = [\mathrm{x}_0 + \mathrm{t} \cdot (\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_0)] + \mathrm{i} \cdot [\mathrm{y}_0 + \mathrm{t} \cdot (\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_0)].$$

Fazendo $X = x_0 + t \cdot (x_1 - x_0)$ e $Y = y_0 + t \cdot (y_1 - y_0)$ é possível eliminar a variável t. Há três casos a considerar:

i. Se $x_1 = x_0$ então $y_1 \neq y_0$, e $X = x_0$ constante, enquanto Y assume todos os valores reais de um intervalo fechado quando t varia no intervalo $[0,1]$. Portanto, a curva B_1 é um segmento de reta vertical.

ii. Se $y_1 = y_0$ então $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_0$, e $Y = y_0$ constante, enquanto X assume todos os valores reais de um intervalo fechado quando t varia no intervalo $[0,1]$. Portanto é um segmento de reta horizontal.

iii. Se $x_1 \neq x_0$ e $y_1 \neq y_0$ então $t = \frac{X-x_0}{x_1-x_0}$. Logo

$$Y = y_0 + \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right) \cdot (X - x_0)$$

de onde segue-se que B_1 é um segmento de reta inclinada, com coeficiente angular $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$, pois X assume todos os valores reais de um intervalo fechado quando t varia no intervalo $[0,1]$, e pela relação acima, Y também assume todos os valores reais de um outro intervalo fechado quando t varia no intervalo $[0,1]$.

TEOREMA: Uma curva de Bézier definida por três pontos distintos não colineares é sempre um arco de parábola. Uma curva de Bézier definida por três pontos colineares, pelo menos dois distintos, é sempre um segmento de reta.

Demonstração: Uma parábola centrada na origem, com reta diretriz horizontal, e com concavidade para cima é

$$y = \frac{1}{4a} \cdot x^2$$

com $a > 0$. Como pode-se identificar os pontos de $\mathbb{R}^2$ com os elementos de $\mathbb{C}$, os pontos da parábola $y = \frac{1}{4a} \cdot x^2$ serão identificados com o número complexo $z = x + i \cdot \frac{1}{4a} \cdot x^2$. Multiplicando-se esse número z pelo número complexo $\cos(\theta) + i \cdot \mathrm{sen}(\theta)$ obtém-se a parábola original rotacionada pelo ângulo θ

$$w = z \cdot [cos(\theta) + i \cdot \mathrm{sen}(\theta)] = \left(x + i \cdot \frac{1}{4a} \cdot x^2\right) \cdot (cos(\theta) + i \cdot \mathrm{sen}(\theta))$$

Somando-se a esta última expressão o número complexo $z_V = x_V + i \cdot y_V$ translada-se a parábola

$$Z(x) = \mathrm{z_V} + \mathrm{w} = (\mathrm{x_V} + \mathrm{i} \cdot \mathrm{y_V}) + \left(x + i \cdot \frac{1}{4a} \cdot x^2\right) \cdot (cos(\theta) + i \cdot \mathrm{sen}(\theta))$$

Notadamente o vértice que permanecia na origem agora figura em (x_V, y_V). Alterando-se o parâmetro

$$Z(x) = z_V + w = (x_V + i \cdot y_V) + \left(x + i \cdot \frac{1}{4a} \cdot x^2\right) \cdot (cos(\theta) + i \cdot sen(\theta))$$

Notadamente o vértice que permanecia na origem agora figura em (x_V, y_V). Alterando-se o parâmetro

$$Z(s) = z_V + w = (x_V + i \cdot y_V) + \left(ks - s_0 + i \cdot \frac{1}{4a} \cdot (ks - s_0)^2\right) \cdot (cos(\theta) + i \cdot sen(\theta))$$

separando as partes real e imaginária

$$Z(s) = \left[x_V + (ks - s_0) \cdot cos(\theta) - \frac{1}{4a} \cdot (ks - s_0)^2 \cdot sin(\theta)\right]$$

$$+i \cdot \left[y_V + (ks - s_0) \cdot sin(\theta) + \frac{1}{4a} \cdot (ks - s_0)^2 \cdot cos(\theta)\right]$$

ou ainda

$$Z(s) = \left[\left(x_V - s_0\, cos(\theta) - \frac{s_0^2}{4a} \cdot sen(\theta)\right) + \left(k\, cos(\theta) + \frac{ks_0}{2a} \cdot sen(\theta)\right) \cdot s - \frac{k^2}{4a} \cdot sen(\theta)\, s^2\right] +$$
$$+i \cdot \left[\left(y_V - s_0\, sen(\theta) + \frac{s_0^2}{4a} \cdot cos(\theta)\right) + \left(k\, sen(\theta) - \frac{ks_0}{2a} \cdot cos(\theta)\right) \cdot s + \frac{k^2}{4a} \cdot cos(\theta)\, s^2\right]$$

Agora considere uma curva de Bézier dada por três pontos de controle $P_0 = (x_0, y_0) = x_0 + i \cdot y_0$, $P_1 = (x_1, y_1) = x_1 + i \cdot y_1$, e $P_2 = (x_2, y_2) = x_2 + i \cdot y_2$ dois a dois distintos, não colineares

$$B_2(t) = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} (1-t)^{2-k} \cdot t^k \cdot P_k = (1-t)^2 \cdot P_0 + 2 \cdot t \cdot (1-t) \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2$$

a qual pode ser reescrita sob a forma

$$B_2(t) = [x_0 + 2(x_1 - x_0) \cdot t + (x_0 - 2x_1 + x_2) \cdot t^2] +$$

$$+i \cdot [y_0 + 2(y_1 - y_0) \cdot t + (y_0 - 2y_1 + y_2) \cdot t^2]$$

Agora considere uma curva de Bézier dada por três pontos de controle $P_0 = (x_0, y_0) = x_0 + i \cdot y_0$, $P_1 = (x_1, y_1) = x_1 + i \cdot y_1$, e $P_2 = (x_2, y_2) = x_2 + i \cdot y_2$ dois a dois distintos, não colineares

$$B_2(t) = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} (1-t)^{2-k} \cdot t^k \cdot P_k = (1-t)^2 \cdot P_0 + 2 \cdot t \cdot (1-t) \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2$$

a qual pode ser reescrita sob a forma

$$B_2(t) = [x_0 + 2(x_1 - x_0) \cdot t + (x_0 - 2x_1 + x_2) \cdot t^2] +$$

$$+i \cdot [y_0 + 2(y_1 - y_0) \cdot t + (y_0 - 2y_1 + y_2) \cdot t^2]$$

Assim, $Z(t) = B_2(t)$ para todo $t \in [0,1]$, se, e somente se, for possível determinar $\theta, k, a, s_0, x_V, y_V$ em termos de $x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2$, e concluir-se-ia que a curva de Bézier seria um arco de parábola. De fato,

$$x_0 = x_V - s_0 \cdot cos(\theta) - \frac{s_0^2}{4a} \cdot sen(\theta) \qquad y_0 = y_V - s_0 \cdot sen(\theta) + \frac{s_0^2}{4a} \cdot \cos(\theta)$$

$$2(x_1 - x_0) = k \cdot cos(\theta) + \frac{ks_0}{4a} \cdot sen(\theta) \qquad 2(y_1 - y_0) = k \cdot sen(\theta) - \frac{ks_0}{4a} \cdot cos(\theta)$$

$$x_0 - 2x_1 + x_2 = -\frac{k^2}{4a} \cdot sen(\theta) \qquad y_0 - 2y_1 + y_2 = \frac{k^2}{4a} \cdot cos(\theta)$$

Manipulando as duas últimas equações

$$(x_0 - 2x_1 + x_2) \cdot cos(\theta) + (y_0 - 2y_1 + y_2) \cdot sen(\theta) = 0$$

Permite-se encontrar θ

e as duas últimas

$$\frac{1}{4a} = \frac{1}{k^2} \cdot [(y_0 - 2y_1 + y_2) \cdot cos(\theta) - (x_0 - 2x_1 + x_2) \cdot sen(\theta)]$$

Dadas as hipóteses, é preciso um cuidado adicional. Há dois valores possíveis para θ, o que implica em dois valores possíveis para k, e na sequência, dois valores possíveis para a. No entanto, apenas um desses valores para a deve ser positivo, atendendo a hipótese. Usa-se a partir desse ponto apenas as escolhas adequadas para θ, k, a.

Novamente manipulando as equações centrais

$$s_0 = \frac{4a}{k} \cdot [(x_1 - x_0) \cdot sen(\theta) - (y_1 - y_0) \cdot cos(\theta)]$$

Por fim ficam determinados

$$x_V = x_0 + s_0 \cdot cos(\theta) + \frac{s_0^2}{4a} \cdot sen(\theta) \quad e \quad y_V = y_0 + s_0 \cdot sen(\theta) - \frac{s_0^2}{4a} \cdot cos(\theta).$$

Curvas de Bézier: Aplicações

Desde quando o gênero humano se organizou em civilizações, em qualquer segmento, sempre houve uma busca pela precisão, e pela repetição de tarefas com a mesma qualidade, e por fim, na melhoria dos projetos e da qualidade. Se a imagem da Revolução Industrial permeou sua imaginação ao ler o trecho anterior, pense novamente. A Revolução Industrial não criou os ofícios ou a estratificação das sociedades em função desses.

Assim, desde sempre, a humanidade necessitou desenvolver meios artificiais para alcançar os mais diversos objetivos, com precisão, primando pela economia de tempo nas repetições, e na medida do possível, alcançar melhorias. Dessa necessidade, surgiram os computadores, primeiro de natureza mecânica e artesanal, e nos dias atuais, de natureza nano e microeletrônica, produzidos em larga escala industrial, em nível mundial, devido à importância socioeconômica que desempenham no momento.

Observando-se tal importância, e considerando o MEC, em sua revisão da BNCC para o Ensino Médio, pode-se ler

> [...] No Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, conforme anteriormente anunciado. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. (BNCC)

Tais considerações colocam a área de Matemática e suas Tecnologias diante da responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes, para promover ações que estimulem e provoquem seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum.

Portanto, nota-se o interesse em relacionar a Matemática às aplicações Tecnológicas, e à preocupação com a inserção, ainda que futuramente, dos estudantes no mercado de trabalho. Tais aspirações tornam-se mais evidentes nas habilidades específicas da Matemática em que diversas delas serão desenvolvidas utilizando tecnologias digitais, ou não.

Em particular, é de nosso interesse as habilidades específicas:

EM13MAT302:

> Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT401:

> Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

EM13MAT402:

> Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da

outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

EM13MAT405:

Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

De fato, as curvas de Bézier, utilizadas na produção de imagens vetoriais, são em última análise, funções polinomiais de um parâmetro, de grau qualquer, e pode-se aproximar a grande maioria das curvas de interesse prático por funções polinomiais de segundo grau (três pontos), utilizando dois pontos, inicial e final, e um ponto intermediário.

Deste modo, é possível desenhar uma ampla gama de contornos, incluindo fontes para produção de texto, por meio das Curvas de Bézier, com a vantagem de não haver perda de qualidade na ampliação da escala das imagens, e o tamanho de armazenamento reduzido, independente da escala.

Atualmente, as curvas de Bézier são extensivamente usadas em computação gráfica na modelagem de curvas suaves, em animação, no design de interfaces e na produção de fontes. Curvas de Bézier quadráticas ou cúbicas são mais comumente usadas, já que polinômios de grau maior são computacionalmente mais custosos de calcular.

Assim, para formas mais complexas, muitas vezes são usados caminhos, isto é, utilizam-se um conjunto ordenado de curvas de Bézier de grau baixo, em que o ponto final de uma coincide com o ponto inicial da seguinte. Por exemplo, Gleyd Oliveira dos Santos diz, SANTOS (2015, p.15), que as fontes TrueType são formadas por caminhos de curvas de Bézier quadráticas, já os sistemas mais modernos como PostScript (usado em arquivos PDF), Metafont e SVG usam caminhos de curvas de Bézier cúbicas.

Com vista a isso, alguns softwares aplicam as curvas de Bézier, por exemplo: Adobe Illustrator, CorelDraw, Freehand, Fireworks, Inkscape, GIMP, Photoshop, entre outros. Eles a utilizam para criar um logotipo; vetorizar uma imagem; modelar e desenhar curvas entre outras aplicações.

Desde os tempos da Matemática Grega Clássica, sabe-se que a área delimitada por um arco de parábola é igual a quatro terços da área do triângulo determinado pelas extremidades e pelo ponto cuja tangente à parábola é também paralela ao segmento de reta que une as extremidades, conforme MOHNSAM (2014).

Intuitivamente pode-se aproximar curvas complexas por uma junção de curvas mais simples tão bem quanto se queira. A manipulação de Curvas de Bézier de ordem dois é demasiadamente simples neste caso, e obter a área delimitada pelos diversos arcos de parábola torna-se imediato. Resta apenas uma área poligonal a ser calculada, que não apresenta dificuldades, pois pode ser decomposta em uma junção de triângulos e retângulos.

Considerações Finais

O ensino da Matemática precisa ser tratado de forma dinâmica, para que consiga despertar o interesse do estudante, de forma a proporcionar uma interação professor/aluno e aluno/aluno, fomentando a busca do melhor entendimento e compreensão dos princípios matemáticos. Para tanto, o professor precisa fazer uso de metodologias, que de fato, estimulem o estudante nas situações cotidianas que envolvam aplicações do conhecimento matemático.

Contudo, de acordo com a BNCC (2018), as habilidades são um conjunto de saberes necessários para solucionar situações-problema tipicamente matemáticas. Como exemplo, localizar-se numa cidade desconhecida, desenvolvendo habilidades como a leitura de um mapa ou comunicação no pedido de informações sobre referências geográficas de orientação, posicionamento e direção. Logo, cada habilidade matemática parte da análise de um conjunto de situações específicas que estão intrinsecamente ligadas à Matemática.

Portanto, entendeu-se durante a pesquisa que o professor deve ser um facilitador no processo ensino-aprendizagem, despertando no aluno a necessidade do conhecimento, desenvolvendo atividades que levem a dominar o conhecimento da matemática, principalmente aos temas novos que ao mesmo tempo os vinculem ao seu cotidiano e ao mundo profissional.

As curvas de Bézier constituem uma ferramenta plural de ensino de Matemática no Ensino Médio porque congregam diversos conteúdos, desenvolvem diversas competências, permitem uso de tecnologias tanto para a visualização quanto para aplicações, e as aplicações vão do simples ao sofisticado, do comum ao raro, do cotidiano ao profissional.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Fundamentos pedagógicos e estrutura geral da BNCC.** Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: out. 2020.

FARIN, G., **Curves and Surfaces for Computer Aided Design**, Acadecic Press, 1997.

MARANHÃO. **Documento Curricular do Território Maranhense para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental.** 1ª edição – 2019

MOHNSAM, J. C., **As Contribuições de Arquimedes para o Cálculo de Áreas**, dissertação de mestrado, PROFMAT-FURG, Rio Grande do Sul, 2014. Disponível em: https://profmat.furg.br/images/TCC/TCC_%20Julio_Profmat_Furg.pdf

RUDIN, W., **Principles of Mathematical Analysis**, thirth edition, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw Hill, 1976

SANTOS, Gleyd Oliveira dos. **Aplicação de Curvas de Bézier para o Estudo de Funções Polinomiais no Ensino Médio.** 2015**.** Acessado em: **<**https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/26530/26530.PDF>. Acessado em: 02 de março de 2020.

Recebido em 27 de agosto de 2020.
Aceito em 15 de setembro de 2020.