PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM: UMA INTRODUÇÃO AOS PROBLEMAS DE CONTAGEM

FUNDAMENTAL COUNTING PRINCIPLE: AN INTRODUCTION WITH THE COUNTING PROBLEMS

Idaiane Silva Linhares 1

Jairo Santos da Silva 2

Resumo: No presente artigo é feito um estudo introdutório de um importante princípio da Análise Combinatória, a saber: o Princípio Fundamental da Contagem. Para isso, apresenta-se a definição desse princípio, bem como uma série de exemplos onde ele pode ser aplicado. Com a finalidade de enriquecer a temática desta pesquisa, também é fornecido um pouco da história da Matemática no contexto da contagem. A metodologia aplicada nesta investigação foi a pesquisa de revisão bibliográfica, e os principais resultados aqui obtidos foram alguns exemplos e soluções (de autoria própria) sobre o Princípio Fundamental da Contagem, desenvolvidos ao longo do artigo, assim como algumas discussões sobre o uso do lúdico como ferramenta auxiliadora no processo de ensino e aprendizagem associado aos problemas de contagem.

Palavras – chave: Princípio fundamental da contagem, problemas, lúdico.

Abstract: In this article an introductory study of an important principle of the Combinatorial Analysis is made, namely: the Fundamental Counting Principle. For that, the definition of this principle is presented, as well as a series of examples where it can be applied. In order to enrich the theme of this research, a little bit of the history of the mathematics in the context of counting is also provided. The methodology applied in this investigation was the bibliographic review research, and the main results obtained here were some examples and solutions (of their own authorship) on the Fundamental Counting Principle, developed throughout the article, as well as some discussions on the use of the ludic as an auxiliary tool in the teaching and learning process associated with the counting problems.

Keywords: Fundamental counting principle, problems, ludic.

1- Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Maranhão, polo de Santa Luzia, vinculado ao Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica/PARFOR. Atualmente é Professora Pela SEDUC (MA) no Centro de Ensino Professora Marcelina Noia Alves: Alto Alegre – MA. Tem experiência com Ensino Fundamental e Médio (1º, 2º e 3º anos).LATTES: http://lattes.cnpq.br/4348009822848246. Orcid: https://orcid.org/0000-0001-5567-8618

2- Possui Graduação em Matemática (Licenciatura) pela Universidade Federal do Maranhão (2007), Mestrado em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (2009) e Doutorado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (2017). Atualmente é Professor Adjunto III do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Maranhão (Campus de São Luís) com atuação na graduação e na pós graduação em Matemática (mestrado acadêmico e mestrado profissional – PROFMAT). LATTES: http://lattes.cnpq.br/5545833756032482. Orcid: https://orcid.org/0000-0001-9068-0270

Introdução

A Matemática é uma grande aventura de ideologias e seu contexto histórico reflete os mais nobres pensamentos de incontáveis gerações que ajudaram a desenvolver está tão nobre e importante ciência.

Dentre as muitas tarefas executadas pela humanidade relacionadas à Matemática, existe uma que por vezes pode ser considerada simples, mas não menos importante, a saber: a tarefa de contar. Para execução dessa tarefa, acredita-se que não basta identificar os números, mas fazê-los ter sentido, compreendê-los, interpretá-los, relacioná-los e reter deles o que for mais relevante. Contar é ir além da simples decifração dos números; é oportunizar ao homem o conhecimento para que ele possa se tornar um cidadão crítico e comprometido com a realidade.

Problemas de contagem surgem a partir de tarefas simples da vida cotidiana ou acadêmica de um indivíduo da sociedade. Por exemplo, quando se deseja saber o número de formas (distintas) de se organizar uma fila contendo seis pessoas ou saber a quantidade de maneiras de se pintar uma bandeira (que possui duas formas geométricas) quando se dispõe de três cores distintas ou, ainda, identificar a quantidade de números de dois algarismos distintos existentes, busca-se respostas cujas soluções envolvem a tarefa de contar.

No contexto das atividades acadêmicas, a solução para muitos desses problemas, que por vezes são taxados como difíceis por alguns alunos e até mesmo professores, tem como base um princípio muito conhecido da Análise Combinatória, o chamado Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Através deste princípio, o qual utiliza-se de técnicas matemáticas relativamente simples (envolvendo, basicamente, as operações aritméticas fundamentais de adição, subtração, multiplicação e divisão), pode-se mostrar que a solução para grande parte desses problemas, pode (e deve) ser desenvolvida com o uso de raciocínios simples e sem, necessariamente, a aplicação de fórmulas decorativas e complicadas.

Mas, o que trata o Princípio Fundamental da Contagem? Como e quando utilizar esse princípio? É possível utilizar o lúdico como ferramenta metodológica para aplicação e absorção de conhecimentos relacionados ao PFC?

Diante dessas indagações, a presente pesquisa, tem como objetivo principal introduzir um estudo sobre o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), uma vez que relatos de alguns educadores mostram que os alunos ao adentrarem no ambiente escolar do Ensino Médio ou Universitário sentem muitas dificuldades relacionadas aos problemas de contagem. Tais dificuldades podem estar associadas, justamente, com a falta de uma abordagem preliminar dessa temática nos anos precedentes, o que serviu de motivação para a elaboração desta pesquisa, de natureza bibliográfica.

Os objetivos específicos almejados com esta investigação são: enunciar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), destacar as principais características do princípio aditivo e multiplicativo em situações-problemas do cotidiano e utilizar o lúdico como metodologia que promova a aprendizagem de problemas de contagem em sala de aula.

O presente artigo está dividido em três seções, organizadas como segue.

A primeira seção relata um panorama histórico da Matemática no contexto da contagem. Mais especificamente, será estabelecido e fundamentada as origens históricas da Matemática em ralação aos primórdios da contagem e da origem dos números.

Na segunda seção apresenta-se o Princípio Fundamental da Contagem. Aqui, objetiva-se reconhecer e compreender como utilizar esse princípio. Para isso, serão apresentados alguns exemplos de livros didáticos e de autoria própria, seguidos de cálculos com resoluções e explicações que caracterizem o tema em estudo.

Finalmente, na terceira seção, é feita uma discussão sobre o uso do lúdico como ferramenta auxiliadora no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos relacionados ao Princípio Fundamental da Contagem. Para isso, apresenta-se alguns exemplos de aplicação em vários contextos, retirados de livros didáticos e, também, de autoria própria, com o objetivo de fornecer uma melhor compreensão desse tão importante princípio da Matemática.

Uma síntese da história da Matemática no contexto da contagem

O homem evoluiu através dos séculos, pode-se dizer até mesmo dos milênios, por ter a necessidade de algo. E em relação ao processo de contagem, ou seja, sua história e origem, estão relacionadas com o princípio da necessidade. Isto é, o homem percebeu que tinha a necessidade de contar através do desenvolvimento dos seus afazeres, quando o ser humano foi deixando de ser caçador, pescador e coletor de alimentos para exercer tarefas da agricultura.

A evolução do processo da contagem, nesse contexto histórico, é descrita:

> [...] como uma noção de matemática simples, onde o processo de contagem, categoricamente se inicia a ser desenvolvido pelo sujeito muito antes de ter escrita ou civilização, nesse ponto de vista, existe poucos fragmentos intelectuais, concretizados para a sua análise referente ao processo de contagem no ambiente matemático. Portanto, as habilidades de contagem precedem qualquer evolução matemática mais avançada e sua compreensão é um passo inovador e essencial para uma abordagem histórica da matemática (MOL, 2013, p.13).

As primeiras formas de agricultura, cerca de dez mil anos no Oriente Médio, já percebiam a necessidade de controlar o rebanho, pois a cada ano existiam perdas e ganhos. Naturalmente surgiam perguntas do tipo: como contar isso? como administrar? como ter esse controle? Então nesse contexto surge a premência de querer contar. Nessa linha de pensamento, aparece a ideia de usar pequenas pedras, conforme relata Assis:

> Pela manhã para cada animal que saía para o rebanho, era inserida uma pedrinha em um saco. No final da tarde a operação era inversa, onde para cada animal que retornava era retirada uma pedra do saco. Se a quantidade de pedras fosse maior que número de animais, é porque faltavam animais, na comparação inversa, se a quantidade de pedras fosse menor que o número de animais, significava que voltaram mais animais, onde nesse caso, acrescentaria a pedra no saco referente aquele animal. Isso sempre feito de um a um. (ASSIS, 2014, p. 2).

No início desse processo de contar a comparação entre as unidades também era feita de outras formas, como marcas e desenhos em paredes de cavernas, e com o uso de objetos como conchas, cordas (onde eram feitos nós), grãos, dentre outros. Essas diversas maneiras de comparação serviam como instrumento de contagem para estabelecer uma quantidade e a noção de número.

No decorrer dos anos, com o avanço científico e tecnológico das civilizações, essas quantidades passaram a ser representadas através de símbolos, gestos, palavras, entre outros, que eram usados de acordo com cada civilização. Por exemplo, os povos aborígenes praticamente tinham seu próprio sistema de contagem, assim como os mesopotâmicos que utilizavam argila para ajudar em suas necessidades de contagem, onde utilizavam diversos símbolos para facilitar sua forma de contar. Temos também a civilização egípcia, ou seja, uma cultura rica em diversos seguimentos e com um nível intelectual diferenciado para época, pois tinha sua própria forma de contagem e um sistema numérico que ajudava a governar e controlar suas produções, principalmente na arquitetura.

Vale ressaltar que o processo de contagem é algo avançado para o período histórico, pode-se destacar uma forma filosófica de pensar, para satisfazer suas necessidades do dia a dia e para realizar suas tarefas, pois não se trata somente de algo instintivo ou inato.

> Seu início aconteceu quando o homem desenvolveu a

> capacidade de comparar conjuntos de objetos e estabelecer entre eles uma correspondência um a um. Por exemplo, um pastor podia ter a noção do tamanho de seu rebanho ao comparar suas ovelhas com os dedos de suas mãos. Partes do corpo, como os dedos das mãos ou dos pés, funcionaram como instrumentos de contagem naturais [...]. No entanto, esse primeiro passo ainda não é suficiente para construir um sistema de contagem. Para tal, seria ainda necessário incorporar a noção de ordem. No processo simples de associar objetos aos dedos das mãos, essa noção aparece ao ordenarmos os dedos, do polegar para o mínimo ou vice-versa. Note-se que o modo como os dedos são usados na contagem é um fato cultural: diferentes povos ordenam os dedos de forma distinta — alguns povos fecham os dedos das mãos ao contar, enquanto outros os abrem. (MOL, 2013, p.13)

Dessa forma, percebe-se que o princípio de contagem também fundamentou-se inicialmente através do próprio corpo humano, ou seja, com o uso dos dedos, das mãos ou dos pés, enfim esses membros do corpo contribuíram para o princípio de contagem natural, ajudando a suprir as necessidades matemáticas no ambiente dos indivíduos daquela época.

Trazendo esse contexto para a realidade, dentro do espaço escolar, a criança pode estabelecer através dos dedos das mãos um princípio de contagem, utilizando objetos do seu dia a dia, com o objetivo de ajudar essas crianças à estabelecerem uma forma de contagem física e proativa para o fortalecimento do seu psicológico, dentro do recinto escolar, principalmente valorizando os princípios de interação e convivência social e educacional. Além disso, esse processo pedagógico de uso de objetos e membros do corpo humano também pode ser introduzido como forma de ludicidade.

A evolução do ser humano com o passar dos séculos, de uma vida arcaica para uma vida em sociedade, de fato, fundiu com novos desafios sociais, econômicos, políticos, culturais e tecnológicos, e proporcionou o rápido desenvolvimento das técnicas de contar.

Com o advento da escrita os símbolos - que representavam quantidades -começaram a dar origem aos números e as civilizações passaram a usar essa nova ferramenta no processo de contagem. Por exemplo, as civilizações babilônicas representavam os primeiros nove números inteiros através de traços verticais como mostrado na Figura 1.

Figura 1.: Representação antiga para os primeiros nove números inteiros.

I	II	III	IIII	IIIII	IIIIII	IIIIIII	IIIIIIII	IIIIIIIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Fonte: Assis (2014) – Monografia: A origem dos Números.

Posteriormente, devido a certas dificuldades em realizar contagens acima de 4, ocorreram mudanças na estrutura dos símbolos babilônicos que representavam os números de 1 a 9. Estes passaram a ser representadas como ilustrada na Figura 2.

Figura 2: Outra representação antiga para alguns números inteiros.

I	II	III	IIII	IIII I	IIII II	IIII III	IIII IIII	IIII IIII I
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Fonte: Assis (2014) – Monografia: A origem dos Números.

As civilizações ao redor do mundo também passaram a representar os números da sua maneira. No Egito, por exemplo, usava-se um sistema de numeração muito parecido com o que chamamos *base dez*, todavia as bases eram dadas de 100 a 1.000.000, e representadas, uma a uma, por um único símbolo matemático daquela época.

Com o passar dos anos, os símbolos começaram a ser substituídos por números e o processo de contar começou a se desenvolver ainda mais.

> O primeiro número inventado foi 1 e ele significava o homem e sua unicidade, o segundo número 2, significava a mulher da família, [...] o número 3 significava muitos, multidão. [...]. Notas históricas sobre a atual notação posicional foi no Norte da Índia, por volta do século V da era cristã, que nasceu o mais antigo sistema de notação próximo do atual. Esta numeração tinha uma característica do sistema moderno. Seus nove primeiros algarismos eram sinais independentes: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 o que significava que um número como o 5 não era entendido como 5 unidades, mas como um símbolo independente. (ASSIS, 2014, p. 3).

Mesmo com toda a evolução nos sistemas de numeração que ajudam o desenvolvimento do processo de contagem ainda existem muitos povos que utilizam formas diferentes para quantificar suas necessidades.

> Um bom exemplo seria uma tribo de índios da Amazônia, mais especificamente os mundurucus, eles contam apenas até cinco, seu modo de vida não apresenta nenhuma necessidade de sistemas de numeração mais complexos. Parece até um pouco estranho nos dias atuais com tantas formas de tecnologia e inovações, uma tribo que ainda vive com um sistema de numeração tão rudimentar. Mas por isso se torna tão interessante estes tipos de estudo que resgatam teorias interessantes que não paramos para analisar e ver o quão complexas elas foram em sua época. (BORGES; BONFIM, 2012, p.37).

Por fim, vale destacar que o processo de evolução dos vários tipos de sistemas de numeração utilizados pelas diferentes civilizações (até chegar aos sistemas utilizados nos dias de hoje) foi bastante lento e por vezes foi, até mesmo, incorporando novas culturas em sua composição. Basta lembrar que os símbolos romanos, representados por letras (onde a letra "I" é igual a , a letra "V" é igual a , a letra "X" é igual a , etc), são utilizados até hoje em nossa sociedade para representar séculos, capítulos de livros, horas em alguns tipos de relógio, nomes de reis etc.

O princípio fundamental da contagem

Contar é uma das tarefas mais antigas e importantes realizadas pela humanidade. Quando se adentra no âmbito escolar percebe-se que esta é uma das principais deficiências apresentadas pela grande maioria dos estudantes em fase de formação escolar, principalmente no que se refere aos, assim chamados, "problemas de contagem".

Os problemas de contagem ganham grande destaque no Ensino Médio, em meio ao estudo de uma conhecida área da Matemática – a Análise Combinatória, todavia é possível fazer uma abordagem preliminar dessa temática já nos anos finais do Ensino Fundamental, visto que boa parte dos problemas de contagem envolvem raciocínios simples e requerem, para sua solução, apenas conhecimentos das operações matemáticas básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Dessa forma, nesta seção, apresenta-se a definição de um importante princípio que se constitui como base para a solução de muitos dos problemas de contagem, o chamado Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Além disso, exibe-se uma coletânea com alguns exemplos retirados de livros didáticos (e outros de autoria própria), onde esse princípio pode ser aplicado. Vale ressaltar que as soluções exibidas ao longo dessa (e da próxima seção) são também de autoria própria.

Para melhor compreensão do tema, os problemas propostos serão resolvidos com a maior riqueza de detalhes possível, e serão fornecidas, também, algumas observações e comentários didáticos ao longo do texto.

Princípio Fundamental da Contagem: "Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a pq". (LIMA et al, 2005, p.130).

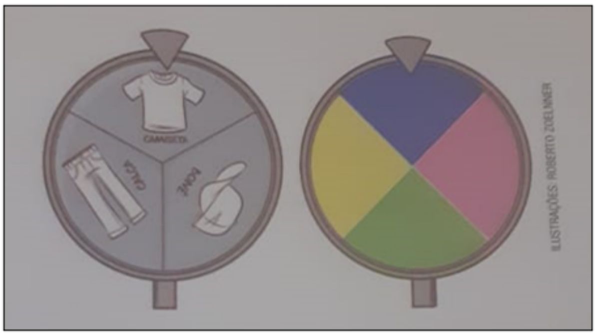
Para ilustrar rapidamente esse princípio considere o seguinte exemplo:

Exemplo 1: Um indivíduo possui 3 bermudas e 2 camisas e deseja formar um conjunto (contendo uma bermuda e uma camisa) para sair. Quantos conjuntos diferentes ele pode formar?

Solução: Observe que esse problema é uma simples aplicação do PFC, pois a decisão D_1 de escolher uma bermuda pode ser tomada de 3 modos (já que ele possui exatamente 3 bermudas) e tendo o indivíduo apenas 2 camisas, a decisão D_2 de escolher uma camisa pode ser tomada de 2 modos. Portanto, pelo PFC, o número de maneiras de se de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2, neste caso, de se formar um conjunto para sair, é igual a $3 \times 2 = 6$ maneiras.

■

Observação 1: **(i)** O princípio fundamental da contagem também é conhecido como *Princípio Multiplicativo* e sua definição pode ser ampliada para mais decisões, isto é, D_3,



D_4, D_5 e assim por diante.

(ii) Um outro ponto importante a se observar é que o PFC pode ser utilizado em problemas envolvendo outros conceitos da Análise Combinatória tais como *arranjo*, *permutação* e *combinação*, mesmo que não sejam problemas simples, isto é, mesmo que os problemas apresentem algum tipo de condição para sua resolução. Esse é um motivo para que se busque o domínio desse princípio.

(iii) Compreender satisfatoriamente o que o PFC quer dizer pode ser considerado como elemento determinante para o sucesso em problemas de contagem.

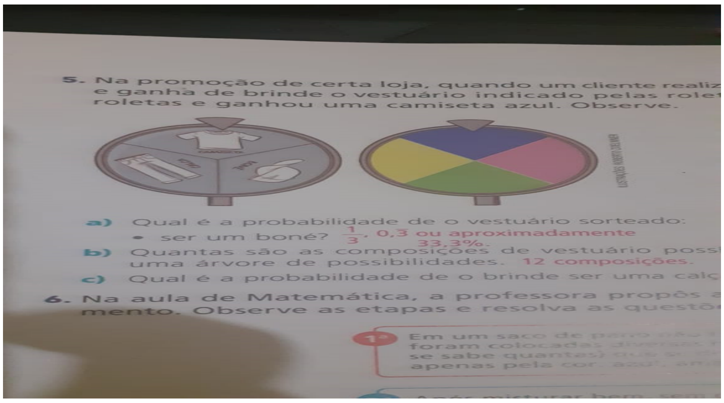
Abaixo destaca-se um exemplo que trata do princípio da contagem, onde utiliza-se um padrão de lógica, probabilidade e resolução em casos com a construção da chamada *arvore de possibilidades*. Para analisar e executar a maneira correta de responder o problema proposto, primeiramente vamos observar a estrutura da imagem, dada na Figura 3, fazer uma análise matemática, para depois tirar as conclusões necessárias.

Exemplo 2:

> Na promoção de certa loja, quando um cliente realiza uma compra, ele gira duas roletas e ganha de brinde o vestuário indicado pelas roletas. Bruno, por exemplo, girou as roletas e ganhou uma camiseta azul. Cada roleta foi dividida em partes iguais. Ao girar cada roleta, a probabilidade de sortear qualquer uma das partes é a mesma.
> a) Qual é a probabilidade de o vestuário sorteado:
> ֍ ser um boné? ֍ ter a cor verde?
> b) Quantas são as composições de vestuário possíveis nesse sorteio? Se necessário, faça uma árvore de possibilidades.
> c) Qual é a probabilidade de o brinde ser uma calça azul? (SOUSA, 2019, p. 247).

As roletas descritas no presente problema são ilustradas na Figura 3.

Figura 3: Ilustração do jogo das roletas.



Fonte: SOUSA (2019) - Panoramas matemática 7.

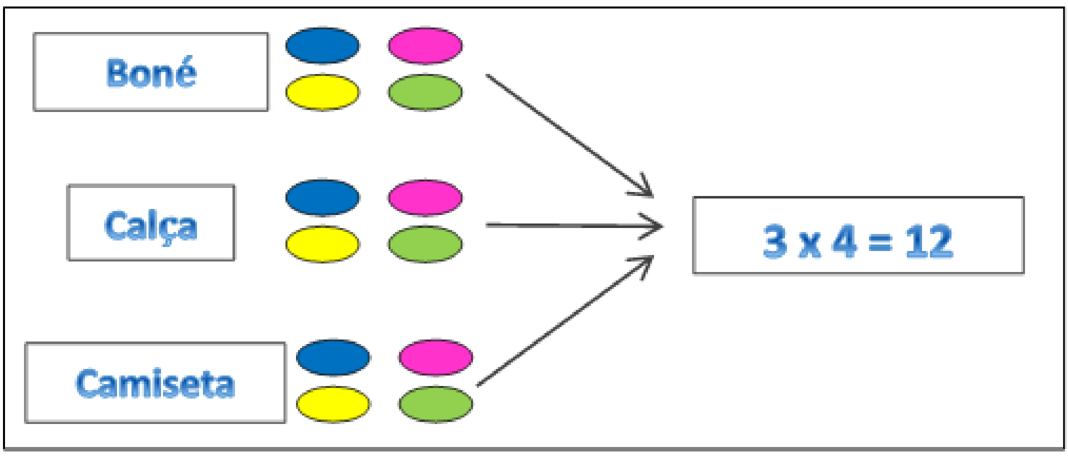
Solução: Uma vez que cada roleta foi dividida em partes iguais, para a primeira parte do item a), conclui-se que a probabilidade de o vestuário sorteado ser um boné é de , ou seja, a terça parte dos objetos que fazem parte da roleta (que contém três peças distintas).

Note que, se dividirmos a fração , teremos um número decimal que é aproximadamente igual a e se multiplicarmos esse número decimal por , teremos um resultado de . Observe o rico conteúdo matemático, que um único exemplo pode ofertar ao aluno, mostrando a multidisciplinariedade matemática nos entornos do princípio da contagem.

Pode-se usar um raciocínio análogo para concluir que a probabilidade de o vestuário sorteado ter a cor verde é de (já que são quatro as possíveis cores disponíveis na roleta de cores).

Em relação ao item b), isto é, a quantidade de composições de vestuário possíveis nesse sorteio, observa-se que temos exatamente composições. Por quê? Porque temos 3 objetos (brindes) que podem ser adquiridos em possíveis cores diferentes. Então, aplicando-se o Princípio Multiplicativo, temos: possíveis composições. Na Figura 4 é ilustrado a árvore de possibilidades com todas as composições de vestuário possíveis para esse sorteio.

Figura 4: Árvore de possibilidades para o problema das roletas.



Fonte: Imagem desenvolvida em PowerPoint (Grifo Nosso).

Observação 2: Um outro princípio da matemática, que também é conhecido como um dos princípios fundamentais da contagem, é o chamado *Princípio Aditivo*, que pode ser definido da seguinte forma:

> Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro B pode ocorrer de n maneiras diferentes, e A e B são mutuamente exclusivos (não podem ocorrer ao mesmo tempo, ou a realização de um evento exclui a realização do outro), então o número de maneiras de ocorrer o evento A ou o evento B é $m+n$. Pensando em termos de conjuntos, outra maneira de se pensar é: se A e B são dois conjuntos com m e n elementos respectivamente, disjuntos ($A \cap B = \emptyset$), então o número de elementos de $A \cup B$ é é $m+n$. (PINTO, 2014, p.12).

Um exemplo simples de aplicação do princípio aditivo é imaginar que se um indivíduo possui 5 filmes de animação, 7 de comédia e 4 de romance, então ele pode escolher um filme para assistir de 16 maneiras diferentes.

A explicação para se chegar a essas 16 maneiras diferentes se dá a partir do fato de que os conjuntos formados, respectivamente, pelos filmes de animação, comédia e de romance, são conjuntos disjuntos, ou seja, não possuem nenhum elemento em comum, e como o indivíduo quer assistir a apenas um filme sem nenhuma restrição, ele poderá assistir a esse filme de $5+7+4=16$ formas diferentes (ele pode assistir *ou* um filme de animação *ou* um filme de comédia *ou* um filme de romance).

É importante não confundir o princípio aditivo com o princípio multiplicativo (aqui denominado PFC). Por exemplo, se esse mesmo indivíduo quisesse assistir a um filme de animação, a um filme de comédia e a um filme de romance, então ele poderia escolher os três filmes para assistir de 140 maneiras diferentes, pois ele tem três decisões a tomar (escolher um filme de animação, um filme de comédia e um filme de romance) onde cada uma delas não depende da outra e podem ser tomadas de 5, 7 e 4 modos, respectivamente. Logo, pelo PFC, o número de maneiras de se tomarem consecutivamente essas três decisões é 5×7×4=140 (ele quer assistir um filme de animação e um filme de comédia e um filme de romance, isto é, um filme de cada gênero).

Observação 3: (i) Ao se resolver um problema combinatório deve-se levar em conta três princípios estratégicos na abordagem do problema, a saber:

> 1. Postura: Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar [...].
>
> 2. Divisão: Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples [...].
>
> 3. Não adiar dificuldades: Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar [...] postergá-la só serve para causar problemas. (LIMA et al, 2006, p.86-87)

(ii) Existem problemas que podem associar, em sua solução, tanto o princípio multiplicativo (aqui chamado PFC) quanto o princípio aditivo, definido na Observação 2. O próximo exemplo mostra um problema onde este fato pode ocorrer.

Exemplo 3: Uma garota tem 5 blusas, 3 calças, 2 saias e 3 pares de sapatos. Quantas são as diferentes maneiras que essa garota pode se vestir?

Solução: Observe que aqui existe uma clássica aplicação do "e", que está associado ao princípio multiplicativo (PFC) e do “ou”, que se associa ao princípio aditivo. De fato, para que a garota possa se vestir ela precisa tomar três decisões. Qual peça escolher para região do tórax (blusa), qual peça escolher para região da cintura (calça “ou” saia) e qual peça escolher para região dos pés (par de sapatos).

Dentre as três decisões a serem tomadas pela garota, pode-se dizer que a “mais restrita” é, teoricamente, a segunda decisão, isto é, escolher a peça para região da cintura, já que ela possui dois tipos diferentes de peças para essa escolha.

Como mencionado na Observação 3, um dos segredos para êxito nos problemas de contagem é, justamente, não adiar dificuldades. Dessa forma, considerando-se que a garota escolherá apenas uma das peças - calça “ou” saia, para usar na região da cintura, então, pelo princípio aditivo, ela pode fazer isso de 3+2=5 maneiras, visto que ela possui, exatamente, 3 calças e 2 saias para escolher. Os eventos de escolher uma calça e escolher uma saia passam a configurar-se como eventos mutuamente exclusivos (não podem ocorrer ao mesmo).

Tomada essa decisão, observa-se que a o número de modos de se tomar a primeira e a terceira decisão, isto é, escolher a peça para a região do tórax (blusa) “e” escolher a peça para a região dos pés (par de sapatos), são, respectivamente, 5 e 3. Esses números, representam, respectivamente, as quantidades de blusas e pares de sapatos que a garota possui.

Agora, usando aplicando o PFC, conclui-se que a garota pode se vestir de 5×5×3=75 formas diferentes, usando para isso, uma blusa “e”, uma calça “ou” uma saia, “e”, um par de sapatos. ■

Para encerrar esta seção, exibe-se, a seguir, um exemplo de aplicação do PFC que também pode ser utilizado para discutir conceitos como o de números e o de sistemas de numeração decimal.

Exemplo 4: Em uma sala de aula foi proposto o desafio de se determinar a quantidade números de quatro dígitos (distintos) existentes. Qual foi a quantidade obtida pelo vencedor do desafio?

Solução: Existem quatro decisões a serem realizadas nesse problema. Decisão D_1, escolher o primeiro dígito do número de quatro algarismo que se pretende formar. Decisão D_2 escolher o segundo dígito, D_3 escolher o terceiro e D_4 escolher o quarto dígito.

Como se é conhecido, cada casa decimal, em nosso sistema de numeração decimal, pode ser preenchida com os dez possíveis números de 0 a 9. Todavia, como não se deseja formar números com dígitos repetidos ao se escolher um número para uma das casas decimais este não poderá ser escolhido em qualquer uma das outras casas decimais. Além disso, o dígito “0” nunca pode ser escolhido para ser o primeiro dígito de um número com “n” casas decimais, pois se isso ocorresse o número teria n-1 casas decimais ao invés de n.

Exposto isso, dentre as quatro decisões a serem realizadas, a que pode ser considerada a mais restrita é, justamente, a escolha do primeiro dígito, já que este não pode ser igual a 0. Dessa forma, analisando os possíveis casos, conclui-se que D_1 pode ser tomada de 9 modos (dos dez possíveis números de 0 a 9, exclui-se apenas o dígito 0), D_2 também pode ser tomada de 9 modos (dos dez possíveis números de 0 a 9, exclui-se apenas o dígito escolhido em D_1), D_3 pode ser tomada de 8 modos (dos dez possíveis números de 0 a 9, exclui-se apenas os dígitos escolhidos em D_1 e em D_2) e, por fim, D_4 pode ser tomada de 7 modos (dos dez possíveis números de 0 a 9, exclui-se apenas os dígitos escolhidos em D_1, em D_2 e em D_3).

Finalmente, após a divisão em casos, usa-se o PFC para concluir que existem, exatamente, 9×9×8×7=4536 números de quatro dígitos distintos.

■

O lúdico como ferramenta para aplicação do PFC

A ludicidade é algo inovador e facilitador para o aprimoramento da aprendizagem dentro de sala de aula, principalmente no campo da Matemática, pois é sempre importante o professor dessa área de conhecimento, apostar em novas didáticas de ensino para que os educandos aprendam de forma diferente, e para que os mesmos tenham um despertar para buscar o conhecimento em Matemática de modo intuitivo através do lúdico.

O lúdico não é só jogar, brincar, ou falar de jogo, na realidade a ludicidade dentro da Matemática é aplicar uma estratégia para melhorar o entendimento do conteúdo trabalhado no contexto escolar, com o objetivo de desenvolver no estudante o letramento matemático dentro da Educação Básica, e em especial, no Ensino Fundamental.

Nessa visão, a nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC) menciona que:

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso. (BRASIL, 2018, p. 262).

Quando o lúdico é aplicado de maneira objetiva no ambiente escolar, os alunos têm um desenvolvimento das suas habilidades, estabelecendo os processos matemáticos para a sua aprendizagem. Nesse contexto, o lúdico é uma boa estratégia para o ensino no que se refere a resolução dos chamados problemas de contagem, pois o estudante tem situações de desafios para solucionar, e pode trabalhar novas técnicas de resolução dos problemas. É nesse aspecto que o lúdico predomina trazendo ideologias inovadoras para aprimorar o conhecimento matemático do aluno acabando com o tabu de que a matemática é um “bicho de sete cabeças”, conforme descrita pelo senso comum.

Sobre o ensino da matemática através da resolução de problemas, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) mencionam que:

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (BRASIL, PCNEM, p.112)

Nessa vertente, analisando as práticas pedagógicas desenvolvidas dentro de sala de aula, no contexto escolar, o aluno é um sujeito frenético e ativo na construção de seu conhecimento, na estruturação de sua intelectualidade e aprende a partir de suas observações, ações e reflexões. Em meio a um ambiente interdisciplinar, de modo pessoal e interpessoal, ele aprende que deve ser respeitado e admirado como um ser que tem o direito de vivenciar o seu próprio intervalo de tempo escolar, social, onde consiga desenvolver sua dinâmica de estudo, para resolver e solucionar problemas, mas, sem ficar desconectado ao que existe ao seu redor.

Então, é fundamental a importância do universo lúdico para melhorar o aprendizado do aluno, no que se refere ao PFC, até mesmo no Ensino Fundamental, onde ele já conhece as operações de somar e multiplicar, que por si só já são suficientes para resolver muitos dos problemas de contagem. Nessa fase, o lúdico ajuda na análise da avaliação e participação do aluno, pois envolve uma maneira descontraída de leitura e compreensão de textos matemáticos que serão úteis ao longo da vida desse indivíduo.

Vejamos a seguir alguns exemplos onde podemos usar o lúdico como fonte para aplicação e absorção de conhecimentos relacionados ao uso do PFC. Em algum desses exemplos pode-se explorar também outros conceitos e áreas da Matemática, como é o caso do primeiro exemplo, que pode ser usado para explorar conceitos de algumas figuras geométricas planas.

Exemplo 5: Em uma sala de aula deseja-se realizar um jogo de cores e figuras para a confecção de fichas. Para isso, os alunos devem escolher uma figura e uma cor para preparar cada ficha. As figuras fornecidas para o jogo são: um quadrado e um triângulo, uma circunferência e um retângulo. Já as cores disponíveis são: laranja, azul e verde. Quantas fichas diferentes podem ser feitas para esse jogo?

Solução: Para confeccionar cada ficha nesse jogo, o aluno precisa tomar duas decisões sucessivas, a saber: escolher a figura que dará o formato da ficha e escolher a cor que usará para pintar a ficha.

Note que a primeira decisão, escolher a figura, pode ser feita de 4 maneiras, já que o aluno dispõe de exatamente quatro figuras (o quadrado, o triângulo, a circunferência e o retângulo). Por outro lado, a segunda decisão, escolher a cor, pode ser tomada de 3 maneiras distintas, pois para o jogo são fornecidas, exatamente, as cores laranja, azul e verde.

Agora, basta usar o PFC para concluir que podem ser confeccionadas, exatamente, $4\times3=12$ fichas distintas no jogo proposto.

■

O lúdico como ferramenta para aplicação do PFC

A ludicidade é algo inovador e facilitador para o aprimoramento da aprendizagem dentro de sala de aula, principalmente no campo da Matemática, pois é sempre importante o professor dessa área de conhecimento, apostar em novas didáticas de ensino para que os educandos aprendam de forma diferente, e para que os mesmos tenham um despertar para buscar o conhecimento em Matemática de modo intuitivo através do lúdico.

O lúdico não é só jogar, brincar, ou falar de jogo, na realidade a ludicidade dentro da Matemática é aplicar uma estratégia para melhorar o entendimento do conteúdo trabalhado no contexto escolar, com o objetivo de desenvolver no estudante o letramento matemático dentro da Educação Básica, e em especial, no Ensino Fundamental.

Nessa visão, a nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC) menciona que:

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso. (BRASIL, 2018, p. 262).

Quando o lúdico é aplicado de maneira objetiva no ambiente escolar, os alunos têm um desenvolvimento das suas habilidades, estabelecendo os processos matemáticos para a sua aprendizagem. Nesse contexto, o lúdico é uma boa estratégia para o ensino no que se refere a resolução dos chamados problemas de contagem, pois o estudante tem situações de desafios para solucionar, e pode trabalhar novas técnicas de resolução dos problemas. É nesse aspecto que o lúdico predomina trazendo ideologias inovadoras para aprimorar o conhecimento matemático do aluno acabando com o tabu de que a matemática é um “bicho de sete cabeças”, conforme descrita pelo senso comum.

Sobre o ensino da matemática através da resolução de problemas, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) mencionam que:

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (BRASIL, PCNEM, p.112)

Nessa vertente, analisando as práticas pedagógicas desenvolvidas dentro de sala de aula, no contexto escolar, o aluno é um sujeito frenético e ativo na construção de seu conhecimento, na estruturação de sua intelectualidade e aprende a partir de suas observações, ações e reflexões. Em meio a um ambiente interdisciplinar, de modo pessoal e interpessoal, ele aprende que deve ser respeitado e admirado como um ser que tem o direito de vivenciar o seu próprio intervalo de tempo escolar, social, onde consiga desenvolver sua dinâmica de estudo, para resolver e solucionar problemas, mas, sem ficar desconectado ao que existe ao seu redor.

Então, é fundamental a importância do universo lúdico para melhorar o aprendizado do aluno, no que se refere ao PFC, até mesmo no Ensino Fundamental, onde ele já conhece as operações de somar e multiplicar, que por si só já são suficientes para resolver muitos dos problemas de contagem. Nessa fase, o lúdico ajuda na análise da avaliação e participação do aluno, pois envolve uma maneira descontraída de leitura e compreensão de textos matemáticos que serão úteis ao longo da vida desse indivíduo.

Vejamos a seguir alguns exemplos onde podemos usar o lúdico como fonte para aplicação e absorção de conhecimentos relacionados ao uso do PFC. Em algum desses exemplos pode-se explorar também outros conceitos e áreas da Matemática, como é o caso do primeiro exemplo, que pode ser usado para explorar conceitos de algumas figuras geométricas planas.

Exemplo 5: Em uma sala de aula deseja-se realizar um jogo de cores e figuras para a confecção de fichas. Para isso, os alunos devem escolher uma figura e uma cor para preparar cada ficha. As figuras fornecidas para o jogo são: um quadrado e um triângulo, uma circunferência e um retângulo. Já as cores disponíveis são: laranja, azul e verde. Quantas fichas diferentes podem ser feitas para esse jogo?

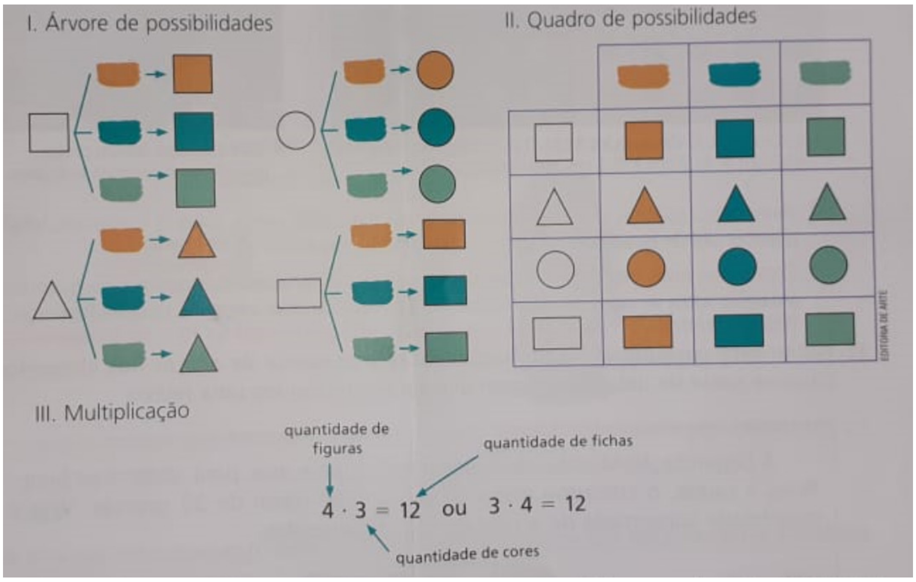
Solução: Para confeccionar cada ficha nesse jogo, o aluno precisa tomar duas decisões sucessivas, a saber: escolher a figura que dará o formato da ficha e escolher a cor que usará para pintar a ficha.

Note que a primeira decisão, escolher a figura, pode ser feita de maneiras, já que o aluno dispõe de exatamente quatro figuras (o quadrado, o triângulo, a circunferência e o retângulo). Por outro lado, a segunda decisão, escolher a cor, pode ser tomada de 3 maneiras distintas, pois para o jogo são fornecidas, exatamente, as cores laranja, azul e verde.

Agora, basta usar o PFC para concluir que podem ser confeccionadas, exatamente, fichas distintas no jogo proposto. ■

A solução apresentada no Exemplo 4 mostra que nem sempre é viável construir o diagrama de possibilidades para exibir toda as possíveis soluções de um problema que se baseia no PFC (já que lá existem soluções possíveis para o problema proposto). Entretanto, para o Exemplo 5 isso pode ser feito. A Figura 5 ilustra o diagrama de possibilidades para o problema do jogo proposto no referido exemplo. Tal figura exibe todas as possíveis fichas que podem ser confeccionados nesse jogo e fornece um resumo rápido da solução pelo PFC.

Figura 5: Jogo de cores e formas para confeccionar fichas.



Fonte: SOUSA (2019, p.54) - Panoramas matemática 6.

Como mencionado anteriormente, quando se fala em ludicidade vem logo à tona de que com certeza serão assuntos sobre jogos e brincadeiras, mas nesse contexto é necessário afirmar que não é só isso. O lúdico desenvolve novas habilidades e faz com que o aluno aprenda de forma didática e diferente dentro de sala de aula. É algo que transforma a realidade da aula, criando um universo novo de ações e reações para o aprendizado dos alunos no campo da matemática no que se refere a solucionar problemas.

Nesse contexto, exibe-se, a seguir, um outro exemplo onde podemos unir o lúdico ao PFC, além de explorar a interdisciplinaridade no contexto educacional.

Exemplo 6 (SOUSA, 2019): Um professor de educação física resolveu jogar com seus alunos um jogo, contento um "tabuleiro de cores" e duas roletas, uma de "mãos e pés", e outra de "cores" (todas divididas em partes iguais). As regras do jogo são as seguintes: Cada aluno gira, na sua vez, o ponteiro da roleta de mãos e pés, assim como o ponteiro da roleta de cores. O resultado indicará o movimento que o aluno deverá realizar no tabuleiro. A Figura 6 ilustra os itens do jogo e quatro crianças brincando. A imagem indica que o resultado obtido, pela criança agachada, ao girar as roletas, foi: "mão esquerda" na roleta de mãos e pés e "cor azul" na roleta de cores. O professor resolveu perguntar aos alunos qual a quantidade de movimentos (distintos) possíveis que poderiam ser realizados nesse jogo. Qual a resposta correta para esse questionamento?

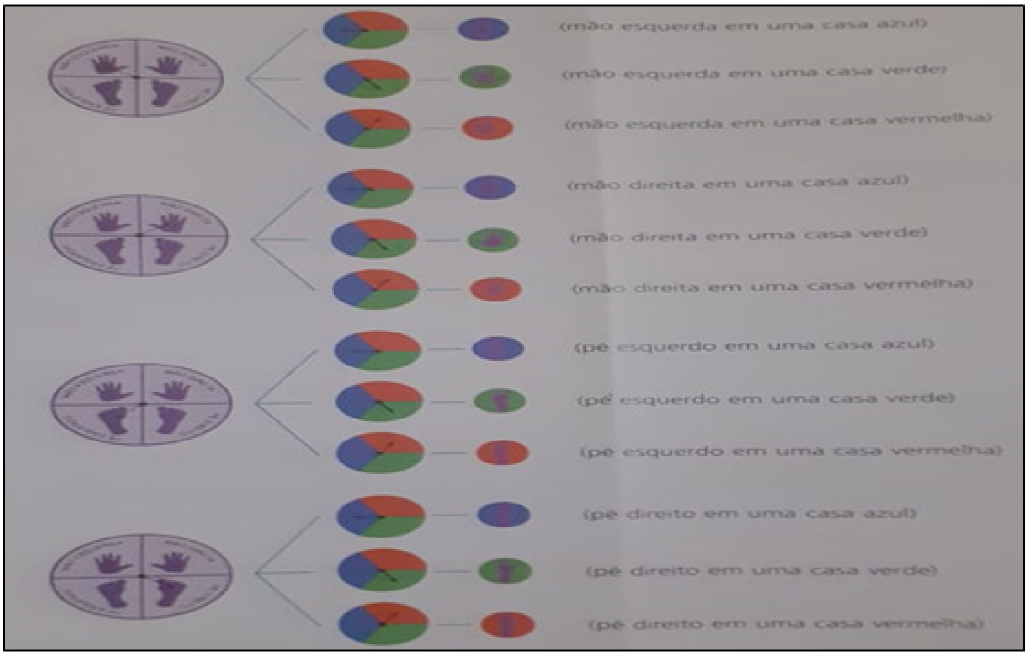
Figura 6: Jogo proposto pelo professor de educação física.

Fonte: SOUSA (2019, p. 230) - Panoramas matemática 8.

Solução: De acordo com as regras do jogo, um aluno, na sua vez, necessita tomar duas decisões para realizar sua jogada, isto é, girar a roleta de "mãos e pés" (cujo resultado pode ser dado de modos distintos, mão esquerda, mão direita, pé esquerdo ou pé direito) e girar a roleta de "cores" (que tem possíveis resultado, já que esta dispõe de três cores, a saber, verde, azul e vermelha). Logo, aplicando-se o PFC, é possível concluir que os movimentos possíveis para esse jogo podem ser realizados de maneiras diferentes. ■

Observação 4: **(i)** Outra maneira de obter esse mesmo resultado (e exibir todos os possíveis movimentos para o jogo proposto) é construir a árvore de possibilidades para esse problema, o que é feito na ilustração da Figura 7.

Figura 7: Árvore de possibilidades do jogo proposto pelo do professor de educação física.



Fonte: SOUSA (2019, p. 231) - Panoramas matemática 8.

(ii) Note que, nesse mesmo problema do Exemplo 6, é possível inserir outros temas da Matemática como o de *Probabilidade*.

> Observando a árvore de possibilidades, podemos perceber que os resultados possíveis são todos diferentes entre si, ou seja, não se repetem. Podemos calcular a *probabilidade* de o resultado obtido por um aluno ser, por exemplo, pé esquerdo em uma casa verde da seguinte maneira: quantidade de resultados possíveis é igual a 12 e quantidade de resultados favoráveis é igual a 1. Então forma uma fração $\frac{1}{12}$.
> Quando adicionamos as probabilidades de todos os possíveis resultados, temos:
> $$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{12}{12}=1$$
> Assim, ao adicionarmos as probabilidades de todos os possíveis resultados, obtemos 1. (SOUSA, 2019, p.231-232)

Através de uma atividade como esta do professor de educação física, descrita acima, percebe-se a interdisciplinaridade dos conteúdos trabalhados dentro de sala de aula, onde pode ser visto as temáticas de multiplicação, fração, adição, princípio de contagem e, principalmente, o lúdico, que, certamente, pôde ajudar os alunos participantes dessa atividade, a adquirirem conhecimento através do jogo didático desenvolvido. Além disso, nessa mesma atividade podem ser desenvolvidas as seguintes habilidades sugeridas pela BNCC:

•"(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo". (BRASIL, 2018, p. 309).

•"(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1". (BRASIL, 2018, p. 311)

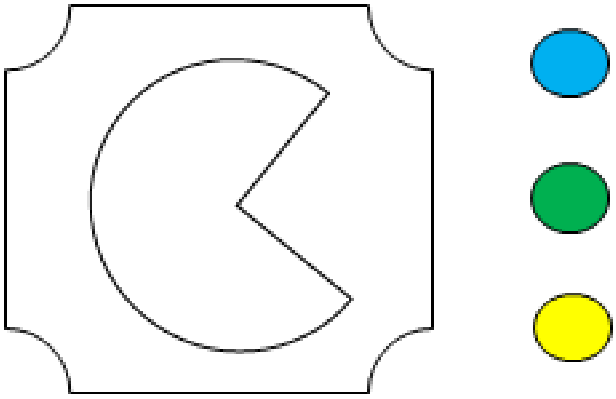
Através do Exemplo 6 percebe-se a importância dos jogos matemáticos dentro de sala de aula, pois através do lúdico no ambiente escolar, temos a convicção de que o aprendizado se fortalece em vários sentidos, principalmente no que se referir a compreender e participar do conteúdo matemático, para identificar a linguística matemática, onde o aluno consegue, interpretar os problemas através da leitura e raciocínio lógico para depois transcrever para o caderno com mais facilidade e entendimento a solução do problema.

O mais interessante da ludicidade é o que se estabelece dentro do recinto escolar, trazendo união, aproximação e interação do aluno/professor, ou seja, um companheirismo entre ambos assim o aluno desperta a curiosidade para aprender a matemática com mais atenção e qualidade nos conteúdos abordados.

Encerra-se essa seção com mais dois problemas onde o lúdico pode ser aplicado em sala de aula pelo professor de Matemática como uma maneira didática e pedagógica de se discutir e aplicar o princípio fundamental da contagem. Também pode-se aproveitar esse exemplo para discutir conceitos da Geometria Plana como retas, círculos, arcos e outras formas geométricas.

Exemplo 7: Um professor de Matemática levou um brinde para dar a um de seus alunos que resolvesse um desafio proposto por ele. O professor confeccionou uma bandeira, com a forma dada na Figura 8, que precisa ser pintada utilizando-se duas das três cores fornecidas (azul, verde e amarelo). O desafio era saber quantas (e quais) eram essas possíveis configurações de bandeira. A que conclusão o aluno vencedor chegou sobre esses questionamentos?

Figura 8: Configuração da bandeira e cores disponíveis.



Fonte: Desenho Elaborado no Word (Grifo Nosso).

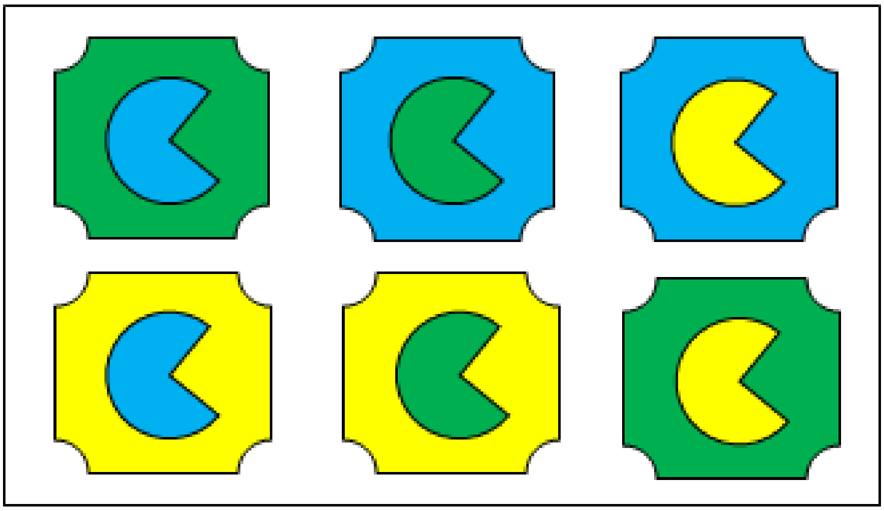
Solução: Observe que a ordem na qual inicia-se a pintura não interfere no resultado do problema, isto é, pode-se iniciar a pintura tanto pelo interior da figura interna (círculo parcial) quanto pelo seu exterior. De fato, analisando-se as duas situações observamos que:

1º caso (*Início da pintura pelo interior do círculo parcial*): Neste caso tem-se duas decisões a serem tomadas: escolher a cor para pintar o interior do círculo parcial e, depois, escolher a cor para pintar o seu exterior. Note que a primeira decisão pode ser tomada de maneiras uma vez que, para este caso, a três cores dadas estão disponíveis para o uso. Tomada a primeira decisão, a segunda decisão pode agora ser realizada apenas de modos, pois das três cores que estavam disponíveis restam, agora, apenas duas, já que a cor utilizada na primeira decisão não pode ser tomada novamente (se isso ocorresse a bandeira ficaria pintada com uma única cor quebrando assim a regra do desafio). Daí, usando o PFC, pode-se concluir que existem, exatamente, maneiras diferentes de se pintar a bandeira do problema.

2º caso (*Início da pintura pelo exterior do círculo parcial*): Neste caso tem-se, analogamente, duas decisões a serem realizadas (inversas àquelas tomadas no primeiro caso): escolher a cor para pintar o exterior do círculo parcial e, depois, escolher a cor para pintar o seu interior. Note que a primeira decisão pode ser tomada de maneiras neste momento, uma vez que, para este caso, a três cores dadas estão livres para o uso. Tomada a primeira decisão, a segunda decisão pode ser realizada apenas de modos, pois das três cores que estavam disponíveis restam, agora, apenas duas, já que a cor utilizada na primeira decisão não pode ser tomada novamente para que a regra do desafio não seja quebrada. Logo, pode-se aplicar o PFC mais uma vez para concluir que existem, exatamente, maneiras diferentes de se pintar a bandeira do problema.

Para exibir quais são essas possíveis configurações de bandeiras basta fazer a árvore de possibilidades para o problema. Isto é fornecido na ilustração da Figura 9.

Figura 9: *Árvore de possibilidades* para o problema da bandeira.



Fonte: Desenho Elaborado no Word (Grifo Nosso). ■

Observação 5: Note que parte do desafio proposto no exemplo anterior, isto é, saber quantas eram as possíveis configurações de bandeira de se pintar utilizando-se duas das três cores fornecidas (azul, verde e amarelo), é um problema típico de *arranjos* dentro da Análise Combinatória, onde muitos professores sugerem o uso da "fórmula dos arranjos simples" (arranjo de três cores tomadas duas a duas) para resolver o problema. Entretanto, como vimos, o uso diretamente do PFC estabelece uma maneira prática e imediata de resolver tal problema sem que o aluno tenha que se preocupar em "decorar" certos tipos de fórmulas. Abaixo listamos um outro exemplo, agora de *permutações simples*, onde o PFC pode ser utilizado sem a necessidade da aplicação da chamada "fórmula das permutações simples".

Exemplo 8: O desafio proposto pelo professor do exemplo anterior foi vencido por seis de seus alunos e ele teve que comprar mais cinco brindes para dar aos demais vencedores. Os seis alunos precisam, agora, organizar uma fila para receberem seus brindes. O professor perguntou então, a eles, de quantas maneiras essa fila pode seria organizada. Qual a resposta dada ao professor?

Solução: Tem-se seis decisões a tomar que são ordenadas da seguinte forma: escolher o primeiro aluno da fila, escolher o segundo, o terceiro, o quarto, o quinto e escolher o sexto integrante para a fila dos brindes. Note que a primeira decisão pode ser tomada de maneiras (uma vez que temos seis alunos para compor a fila|). Escolhido o primeiro integrante dessa fila restarão apenas cinco alunos para ocupar os demais lugares da fila. Daí, a segunda decisão só pode ser tomada de modos. Seguindo-se esse raciocínio até a escolha do ocupante do último lugar dessa fila, pode-se aplicar o PFC para concluir que existem maneiras de se organizar a fila dos brindes, e esta foi a resposta dada ao professor, que resolveu então fazer um sorteio para determinar a ordem dos integrantes nessa fila. ■

Diante dos exemplos exibidos nessa seção, percebe-se a necessidade de que os professores se especializem cada vez mais na busca de práticas pedagógicas (como o lúdico) que os auxiliem a desenvolverem um trabalho, envolvendo o PFC, com cada vez mais qualidade, principalmente no ensino fundamental, onde os primeiros problemas e métodos de contagem vão surgindo na vida escolar dos alunos.

Considerações Finais

Diante do exposto no presente artigo, pôde-se observar que o princípio fundamental da contagem é uma valiosa ferramenta na solução dos chamados "problemas de contagem" e que este vai subsidiar o processo de ensino e aprendizagem de grande parte dos conceitos vistos na Análise Combinatória. Nesse sentido, é importante lembrar que para o efetivo ensino de matemática no âmbito escolar, em especial dos conceitos associados ao PFC, é necessário que a escola interaja de forma coletiva e individual com todos os envolvidos no processo educativo.

Compreende-se, ainda, que o uso do princípio fundamental da contagem na resolução de problemas combinatórios em sala de aula, torna possível aos alunos a capacidade de desenvolverem várias formas de habilidades tais como interpretação, tomada de decisões e visão estratégica para solucionar os mais variados tipos de problemas. Nesse contexto, vale ressaltar que o desenvolvimento de problemas envolvendo PFC também pode ser uma oportunidade de agregar e discutir outros conceitos da Matemática como os de probabilidade, frações, sistema de numeração decimal, geometria plana, entre outros.

Infere-se também que a falta da aprendizagem em relação ao conceito do PFC, pode trazer sérios prejuízos para o desenvolvimento curricular dos alunos, pois estes poderão ter dificuldades na observação de outros conceitos da Análise Combinatória (como os de arranjos, combinações e permutações), bem como redução do seu potencial desenvolvimento em relação ao raciocínio lógico dedutivo.

Como pôde-se observar, as diversas práticas pedagógicas, como o lúdico, são importantes ferramentas que auxiliam a aprendizagem do aluno em diversos conteúdos da matemática. Em especial, o uso do lúdico associado aos problemas envolvendo o PFC pode tornar o ensino e aprendizagem desse conceito muito mais divertido e eficaz.

Quem conhece a importância da Matemática na vida de uma pessoa, sabe o poder que tem os números no seu dia a dia, sabe os benefícios que esta ciência pode proporcionar, sabe que não há tecnologia no mundo que substitua o prazer de solucionar e resolver problemas matemáticos com o seu próprio conhecimento, e sabe que ensinar de forma simples, pode fazer toda a diferença. A ideia dessa pesquisa foi, justamente, resgatar isso em relação aos problemas de contagem, com o uso desse simples, mas não menos importante princípio da Matemática, que é o PFC.

Vale ressaltar que esta pesquisa é parte de um trabalho de monografia de conclusão de curso de Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, sendo fundamental para o desenvolvimento de conceitos e resultados associados aos problemas de contagem.

Referências

ASSIS, J. R. O. **A origem dos números.** Campinas. 2014. Disponível em: <https://www.ime. unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/JR_M1_FM_2014.pdf>. Acesso em: 12/01/2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Ministério da Educação. Governo Federal. CONSED. UNDIME, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)**, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000, p. 112.

BORGES, L. R.; BONFIM, S. H. A origem dos números. *Interfaces da Educ.*, v.2, n.6, p.37-49, 2012.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. v. 2. Coleção Professor de Matemática. 6ª. Ed. Rio de Janeiro. SBM, 2006.

LIMA, E. L. et al. **Temas e problemas elementares**. 2ª. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005, p.130.

MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

PINTO, R. C. **Introdução à Análise Combinatória**. 2014. 59 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio. Rio de Janeiro. 2014.

SOUSA, J. R. **Panoramas matemática 6.** 1. Ed. – São Paulo: FTD, 2019.

SOUSA, J. R. **Panoramas matemática 7.** 1. Ed. – São Paulo: FTD, 2019.

SOUSA, J. R. **Panoramas matemática 8.** 1. Ed. – São Paulo: FTD, 2019.

Recebido em 27 de agosto de 2020.
Aceito em 15 de setembro de 2020.