# UMA ABORDAGEM SOBRE EQUAÇÕES DO 2º GRAU

*AN APPROACH TO 2ND DEGREE EQUATIONS*

**Elaine da Conceição Pereira 1**

**Artur Silva Santos 2**

**Resumo:** O presente trabalho trata sobre a abordagem da Equação do 2º Grau no ensino matemático, buscando expor sua relevância na solução de problemas. Em vista disso, aborda-se conjuntamente estratagemas como a fórmula de Bháskara que auxiliam no ensino-aprendizagem do discente, estabelecendo interpretação de diversas representações, utilizando dos mesmos exemplos que facilitam a compreensão de situações-problemas do dia a dia do ser humano. Para tanto, será feito uso de uma pesquisa descritiva e de natureza bibliográfica. Além disso, faz-se uma pesquisa bibliográfica com abordagem metodológica e aspectos qualitativos e quantitativos, mediante estratégias didáticas com auxílio teórico de alguns autores como Ribeiro (2015), Lorenzato (1995) e Perez (1995).

**Palavras-Chave:** aplicação na sala de aula. Equação do 2º Grau matemática.

**Abstract:** The present work deals with the approach of the 2nd Degree Equation in mathematical teaching, seeking to expose its relevance in solving problems. In view of this, stratagems such as the Bháskara formula that assist in the teaching-learning of the student are addressed together, establishing the interpretation of several representations, using the same examples that facilitate the understanding of human daily problems. For this, a descriptive and bibliographic research will be used. In addition, bibliographic research is carried out with a methodological approach and qualitative and quantitative aspects, through didactic strategies with theoretical assistance from some authors such as Ribeiro (2015), Lorenzato (1995) and Perez (1995).

**Keywords:** application in the classroom. 2nd degree mathematical equation.

1- Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Maranhão, polo de Santa Luzia, vinculado ao Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica/PARFOR. Docente de Matemática no Ensino Médio no Centro de Ensino Professor Valmir da Paixão Santos em Santa Luzia -MA. LATTES: http://lattes.cnpq.br/3749389999172527. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4372-3271

2- Possui graduação em Licenciatura Plena Em Matemática pela Universidade Federal do Maranhão (1993), graduação em Licenciatura Plena Em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1990), graduação em Ciências Com Habilitação Em Matemática pela Federação da Faculdades Celso Lisboa (1988) e mestrado em Matemática Pura pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2004). Atualmente é professor de Ensino Médio - Colégio Militar 2 de Julho, é professor assistente da Universidade Federal do Maranhão. LATTES: http://lattes.cnpq.br/0644649221282963. ORCID:https://orcid.org/0000-0002-6694-4632.

## Introdução

Ao longo dos anos, o estudo das equações tem sido considerado um tema bastante significativo na educação escolar. Representa para os alunos uma nova oportunidade de aprendizagem algébrica, ampliando os horizontes de seu raciocínio abstrato, possibilitando-lhe a compreensão do porquê das fórmulas apresentadas bem como a transferência consciente desse conhecimento para o enfrentamento de situações do cotidiano. Nesse sentido as ideias sobre equações do 2º grau percorrem o conhecimento escolar desde as primeiras noções de proporcionalidade nos anos finais do Ensino Fundamental até ao ensino superior, pois estão entre as mais poderosas e úteis noções em toda a matemática e em várias outras ciências.

O principal objetivo deste trabalho é explorar a teoria das equações do 2º grau e algumas de suas aplicações, visando identificar as principais dificuldades no processo de ensino-aprendizagem dessa temática. Além disso, busca-se propor ao aluno conhecer o processo algébrico para resolução de problemas envolvendo tais equações, fazendo-os relacionar suas aplicações com problemas da vida cotidiana e a partir daí desenvolver sua mentalidade matemática.

Analisa-se que o processo de resolução das equações do 2º grau está também presente no cotidiano das pessoas, mesmo assim os alunos apresentam grandes dificuldades a esses assuntos. Deste modo, tais inquietações são expostas: por que os assuntos sobre equações do 2º grau não são explorados com maior aprofundamento em sala de aula? Será que existe algum método a ser utilizado que facilite a aprendizagem do conteúdo citado? Por que os alunos não mostram interesse em aprender equações do 2º grau?

E com estes questionamentos frente aos alunos percebe-se que o estudo das equações do 2º grau deve ser mais bem explorado fazendo uma relação entre a ideia matemática e o contexto abordado.

A constatação da existência do objeto “Uma abordagem sobre as equações do 2º grau”, que marcam historicamente uma evolução aritmético-algébrica, com resoluções específicas a cada tipo de equação. Busca-se conhecer uma abordagem da equação do 2º grau, através do estudo dos livros didáticos de matemática, identificando os tipos de equações do 2º grau, bem como as técnicas de resoluções.

## A Importância Das Equações Do 2º Grau

Percebe-se que o homem necessita a todo o momento de matemática, pois é de suma importância para resolver as situações problemáticas que se apresenta no seu cotidiano. O conteúdo de equação de 2º grau não é diferente no contexto educacional.

Estudar equação do 2º grau deixou de ser um ato mecânico de decorar fórmulas, tabuada, regras etc. Acredita-se que para a superação de problemas matemáticos é necessário um planejamento que inclua atividades diversificadas e individuais, estudo constante, dedicação e muita competência, o que não é diferente no contexto dos problemas envolvendo equações do 2º grau.

Segundo Lorenzato (1995), a importância do ensino das equações do 2º grau se dar por:

> Na verdade, para justificar a necessidade de se ter as equações do 2º grau na escola, bastaria o argumento de que sem estud*á*-las as pessoas não desenvolvem o pensar ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações da vida que forem geometrizadas, [...] (LORENZATO, 1995, p. 15).

De fato, Perez (1995) em uma de sua pesquisa constatou:

> Que os professores de Matemática preferem o ensino da Aritmética e da Álgebra, ao das equações do 2º grau, metodologia adequada e materiais concretos para realizarem um ensino de qualidade. Reconhecem a importância do ensinar as equações do 2º grau, pois ela ensina a pensar, desenvolve o raciocínio e a criatividade do aluno. [...] (PEREZ, 1995, p. 456).

Dessa forma, a equação do 2º grau não deve ser restrita a um conteúdo isolado, o ensino das mesmas deve ser um elo que liga o aluno ao mundo através de suas aplicações problemas e este não pode ser empírico, pois existe a necessidade de um embasamento científico.

## Breve histórios das equações do 2º grau

As equações do 2º grau são comumente resolvidas nos dias de hoje através de uma expressão matemática atribuída ao matemático indiano Bháskara. Mas analisando a linha cronológica dos fatos, identificamos diversos estudiosos ligados ao desenvolvimento da matemática que contribuíram na elaboração de uma forma prática para o desenvolvimento de tais equações. Problemas que recaem numa equação do 2º grau já apareciam há mais de quatro mil anos em textos escritos em placas de argila na Mesopotâmia, e em papiros no Egito.

Babilônios, egípcios e gregos utilizavam técnicas capazes de resolver esse tipo de equação anos antes de Cristo. Babilônios e egípcios utilizavam-se de textos e símbolos como ferramenta auxiliares à resolução, tinham uma álgebra bem desenvolvida para a época e resolviam essas equações por métodos semelhantes aos atuais ou pelo método de completar quadrados. Naquela época não se falavam em raízes negativas.

> Os escribas da babilônia nunca poderiam imaginar que um dia os matemáticos inventariam os números negativos. Mas é impressionante a exatidão dos cálculos efetuados por aqueles escribas para extrair a raiz quadrada positiva de um número. (GUELLI, 2001, p. 10).

Os gregos conseguiam concluir suas resoluções realizando associações com a geometria, pois eles possuíam uma forma geométrica para solucionar problemas ligados a equações do 2º grau.

Dentre os indianos, os matemáticos Sridhara, Bramagupta e Bháskara também contribuíram para o desenvolvimento da matemática, fornecendo importantes informações sobre as equações do 2º grau.

A primeira descrição da regra geral para achar as raízes da equação do 2º grau parece ser encontrada num trabalho de *Sridhara,* matemático hindu que viveu entre 850 e 950 a.C. Foi ele quem enunciou a regra que originou a fórmula atual para a resolução de equações do segundo grau, pois Bramagupta e Bháskara trabalhavam utilizando textos. Após sua descoberta batizou-a como *"fórmula geral para resolução da equação polinomial do segundo grau"*.

> Nesta época havia plena consciência de que números negativos não são quadrados, e de que o número de raízes de uma equação do 2º grau pode ser 0, 1 ou 2. O matemático indiano Bháskara também mostra como resolver esse tipo equação da seguinte maneira: Multiplique ambos os lados da equação por uma quantidade igual a quatro vezes o coeficiente do quadrado da incógnita; adicione a ambos os lados uma quantidade igual ao quadrado do coeficiente da incógnita; então extraia a raiz quadrada. (PITOMBEIRA, 2004, p.25)

Os árabes foram brilhantemente representados por Al-Khowarizmi, que se baseando no trabalho dos gregos, criou metodologias para a resolução de equações do 2º grau. As representações geométricas utilizadas por Al-Khowarizmi são influenciadas por Euclides.

> Reconhecemos que, utilizando-se do conhecimento deixado por outros matemáticos hindus, principalmente Bramagupta, Bháskara foi quem unificou a solução geral das equações quadráticas pelo método do complemento de quadrados, hoje em dia conhecido por método hindu. A importante fórmula geral para a resolução da equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, é conhecida nos dias atuais, no Brasil, como fórmula de Bháskara (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 35).

Da citação acima, pode-se refletir sobre as influências deixadas pelos hindus na nossa matemática, sobretudo por Bháskara, um importante matemático, em que sua obra está inserida até hoje na prática educacional.

## Tipos de equação do 2º grau

Uma equação chama-se *equação do 2º grau* com uma incógnita quando existem constantes a, b e c reais, com $a \neq 0$, tais que $ax^2 + bx + c = 0$, para todo $x$ real, onde a, b e c são números conhecidos e $x$ é a parte desconhecida da equação, chamada incógnita. As constantes $a$ e b chamam-se coeficientes dos termos $ax^2$ e $bx$, respectivamente, enquanto a constante c chama-se *termo independente* da equação, pois não depende da incógnita $x$.

Quando a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ tiver seus coeficientes, $b = 0$ ou $c = 0$ ou ainda $b = c = 0$ diz-se que ela está em sua forma incompleta. Quando a equação tiver a forma $ax^2 = 0$, esse tipo de equação não tem aplicação prática tendo em vista que as raízes sempre serão nulas, são, portanto, uma mera formalidade matemática. Ou seja, se o produto de dois números é igual a zero ($a.x^2 = 0$), existem três possibilidades: $a = 0$; $x^2 = 0$ ou $a = x^2 = 0$. Logo, pode-se concluir que as raízes serão $x' = 0$ ou $x'' = 0$. Se as equações são da forma $ax^2 + c = 0$, então para encontrar as suas raízes tem-se $ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ · Logo, as suas raízes são $x' = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ou $x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Mas se as equações têm a forma $ax^2 + bx = 0$, para encontrar as suas raízes pode ser colocada na forma fatorada $x(ax + b) = 0$. Como o produto dos dois números é igual a zero, então $x = 0$ ou $ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ que são as raízes da equação.

**Exemplo 1.** As equações a seguir são equações do segundo grau: $x^2 - 3x + 9 = 0$, em que $a = 1$, $b = -3$ e $c = 9$; $3x^2 - 12 = 0$, em que $a = 3$, $b = 0$ e $c = -12$; $-2x^2 + 5x = 0$, em que $a = -2$, $b = 5$ e $c = 0$

a) $7x^2 = 0$, em que $a = 7, b = 0$ e $c = 0$.

Observe que na letra a) do Exemplo 1, a equação apresenta os três termos não nulos. Neste caso, dizemos que ela é uma *equação completa*. Enquanto, nas letras b), c) e d), as equações não apresentam os três termos não nulos, e neste caso, elas são *equações incompletas*.

## Alguns métodos de resolução das equações do 2º grau

Existem vários métodos de resolução de uma equação do 2º grau, contudo, serão abordados alguns métodos que facilitarão bastante o processo de ensino aprendizagem, mostrando as maneiras de manipulação de equações do 2º grau de uma forma diferente da usada tradicionalmente, usando propriedades básicas e fundamentais, demonstrando assim que existem várias maneiras de se resolver um problema algébrico.

Método 1: método de completar quadrado

Consideremos a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Tem-se por objetivo manipular algebricamente a equação de modo a fazer surgir de modo conveniente um trinômio quadrado perfeito. Para tanto, multiplicando ambos os membros da equação em questão por $4a$, obtém-se

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ ou, equivalentemente, $(2ax)^2 + 2(2ax)b = -4ac$.

Somando $b^2$ a ambos os membros desta última igualdade, conclui-se que

$$(2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Observa-se que o primeiro membro da igualdade acima é um trinômio quadrado perfeito e, portanto, escrevendo-o em sua forma fatorada, resulta

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

de onde se extra $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ e, isolando $x$, obtém-se $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ que é a fórmula resolutiva de equações do segundo grau.

É interessante utilizar-se o processo de obtenção da fórmula acima como método de resolução de equações do segundo grau. Por exemplo, consideremos a equação do segundo grau com uma incógnita $x^2 + 5x + 6 = 0$. Segue daqui que $x^2 + 5x = -6$. Deseja-se obter $y$ de modo que, somando $y^2$ a ambos membros da última igualdade acima, seu primeiro membro seja um trinômio quadrado perfeito. Mais precisamente, olhando para a igualdade $x^2 + 5x + y^2 = -6 + y^2$, deseja-se que $x^2 + 5x + y^2 = (x + y)^2$. Deste modo, tem-se $x^2 + 5x + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$ o que ocorre se, e somente se, $2xy = 5x$, ou, equivalentemente, se e somente se $y = \frac{5}{2}\cdot$ Tem-se então a equação equivalente $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = -6 + \frac{25}{4}$, em que resulta $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot$ Extraindo-se a raiz quadrada em ambos membros desta última igualdade obtém-se $x + \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}$ e, consequentemente, $x = \frac{-5\pm1}{2}\cdot$

Logo, $x' = \frac{-5-1}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ ou $x' = \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$.

Sabe-se que o hábito de dá o nome de *Bháskara* para essa fórmula de equação do segundo grau é uma característica somente do ensino brasileiro e que se estabeleceu por volta da década de sessenta em virtude da mesma ter sido a forma utilizada por *Bháskara* para resolver algebricamente a equação do 2º grau.

Na literatura internacional não se encontra o nome de *Bháskara* para essa fórmula, porque não é adequado, já que problemas que recaem numa equação do segundo grau já apareciam, há quase quatro mil anos atrás, em textos escritos pelos babilônios. Nesses textos o que se tinha era uma receita escrita em prosa, sem uso de símbolos que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos.

*Bháskara* foi um matemático indiano que nasceu em 1114 e viveu até 1185 ele é considerado um dos mais importantes matemáticos do século XII. No ramo da matemática os seus trabalhos mais conhecidos são Lilavati e Vijaganita que tratam de aritmética e álgebra respectivamente, e contém vários problemas sobre equações lineares e quadráticas. No entanto até o fim do século XVI não se usava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau, pois não se usava letras para representar os coeficientes de uma equação.

Outra forma de fazer o completamento do trinômio quadrado perfeito é dada como segue: dividindo ambos os membros da equação $ax^2 + bx + c = 0$ por $a$, obtém-se $0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}$, donde $x^2 + 2\frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}\cdot$ Somando $\frac{b^2}{4a^2}$ a ambos membros da igualdade anterior, resulta $x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}\cdot$ Observe que o primeiro membro da última igualdade é agora um trinômio quadrado perfeito e, escrevendo-o em sua forma fatorada, obtém-se $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ e, consequentemente, $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot$ Isolando $x$ na equação $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, resulta $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Note que se $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ou $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, então $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ou $x_1x_2 = \frac{c}{a}\cdot$ Fazendo $-\frac{b}{a} = s$, $\frac{c}{a} = p$ e substituindo na equação $ax^2 + bx + c = 0$, resulta $x^2 - sx + p = 0\cdot$ Isolando a constante $p$ n equação $x^2 - sx + p = 0$, tem-se $x^2 - 2\frac{s}{2}x = -p$. Somando $\frac{s^2}{4}$ a ambos membros da igualdade $x^2 - 2\frac{s}{2}x = -p$, obtém-se $x^2 - 2\frac{s}{2}x + \frac{s^2}{4} = \frac{s^2}{4} - p = \frac{s^2-4p}{4}$ e, uma vez que o primeiro membro da última acima igualdade é um trinômio quadrado perfeito, escrevendo-o em sua forma fatorada, tem-se $\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2-4p}{4}\cdot$ Extraindo a raiz em ambos membros e isolando $x$, verifica-se que $x = \frac{s\pm\sqrt{s^2-4p}}{2}$. Este último completamento chama-se de *método da semissoma e do produto*. Segundo Boyer (2003) essa era a forma como os babilônios resolviam as equações do tipo $x^2 - sx + p = 0$.

## Método 2: método de Viéte

François Viéte foi um matemático francês que nasceu em Fontenay-le-Comte no ano de 1540 e morreu em Paris no ano de 1603. Estudou direito e foi membro do parlamento da Bretanha, ou seja, não era um matemático por profissão. Porém seu lazer era dedicado à matemática dentro da qual fez contribuições à Aritmética, Álgebra, Trigonometria e Geometria. Mas, sem dúvidas, foi na Álgebra que ocorreram suas mais importantes contribuições, pois aqui Viéte chegou mais próximo das ideias modernas.

Segundo Amaral (1988, p.18-20), em sua obra foi encontrada, pela primeira vez em Álgebra, uma diferença clara entre o conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida que chamamos de incógnita. Viéte utilizou uma vogal para representar uma grandeza ou um número supostamente conhecido ou dado. Na época de Viéte, a álgebra árabe já havia sido aperfeiçoada, tanto pelas resoluções das equações quadráticas, cúbicas e quárticas, como por um uso parcial de símbolos.

Uma maneira de demonstrar a fórmula resolutiva da equação de 2º grau, segundo Amaral (1988, p.18-20) é o método de Viéte, que consistia em considerar duas novas variáveis ou incógnitas que chamaremos aqui de incógnitas auxiliares. Vamos descrever o método de Viéte para resolução de equações do segundo grau.

Considere novamente a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Fazendo $x = u + v$, onde $u$ e $v$ são incógnitas auxiliares, e substituindo na equação, tem-se

$$a(u+v)^2 + b(u+v) + c = 0.$$

Desenvolvendo o produto notável, obtém-se

$$au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c = 0.$$

Escrevendo a última igualdade acima como uma equação quadrática na incógnita $u$, resulta $au^2 + (2av + b)u + av^2 + bv + c = 0$.

Viéte transformou essa equação numa equação incompleta do segundo grau, anulando o coeficiente do termo de primeiro grau em $u$, isto é, fazendo $v = -\frac{b}{2a}$ · Obtém-se $au^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$ o que nos dá $u^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

A partir daqui, $u = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e, consequentemente, $x = u + v = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

## Método 3: método de Euler

Entende-se que no método de Euler, que foi um importante matemático do século XVII, para resolver a equação do segundo grau, segundo Assis (2006 p.43-44), usou uma técnica muito conhecida entre os matemáticos, que é a substituição de variável; ele também fez uso dos seus conhecimentos de sistemas lineares e determinantes. A seguir será feita a sua demonstração.

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, e fazendo $x = u + v$ e, elevando ao quadrado ambos membros, tem-se $x^2 = (u + v)^2$. De onde resulta o seguinte sistema de equações $S$: $\begin{cases} ax^2 + bx = c = 0 \\ x - (u + v) = 0 \\ x^2 - (u + v)x = 0 \end{cases}$

Multiplicando todas as equações do sistema homogêneo por $x$, obtém-se um novo sistema linear semelhante ao sistema linear $S$, ou seja, $S_1$: $\begin{cases} ax^2 + bx^2 + cx = 0 \\ x^2 - x(u + v) = 0 \\ x^3 - x^2(u + v) = 0 \end{cases}$

Usando a teoria dos determinantes, Euler sabia que uma das soluções seria a trivial ou nula por se tratar de um sistema homogêneo; a outra só iria existir se o determinante de seus coeficientes fosse igual à zero. Assim, estabeleceu que $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & -(u+v) \\ 1 & -(u+v) & 0 \end{vmatrix} = 0$. Calculando o valor do determinante $\Delta$, tem-se $a[-(u + v)^2] - b(u + v) - c = 0$. De onde resulta

$$-au^2 - 2auv - v^2 - bu - bv - c = 0.$$

Multiplicando por -1 por ambos membros da última igualdade acima e depois formando uma equação na variável u, obtém-se $au^2 + (2av + b)u + av^2 + bv + c = 0$. Para transformar a equação $au^2 + (2av + b)u + av^2 + bv + c = 0$ numa equação incompleta na incógnita $u$, Euler usou da seguinte estratégia, fez $2av + b = 0$, e encontrou o valor $v = -\frac{b}{2a}$ · Substituindo-o $v = -\frac{b}{2a}$ na equação

$$au^2 + (2av + b)u + av^2 + bv + c = 0$$

tem-se $au^2 + \left[2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b\right]u + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$ que ficou reduzida a $au^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$ e, portanto, $u^2 = -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a}$ que é equivalente a

$$u^2 = \frac{-b^2 + 2b^2 - 4ac}{4a^2}, \text{ ou seja, } u = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

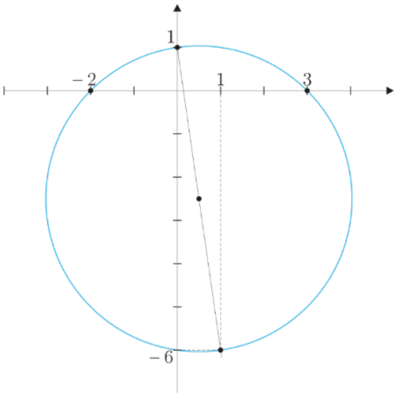
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

cujas raízes são $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ou $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Como esse método faz o uso de determinantes, é claro que não se pode usar no Ensino Fundamental, mas pode ser mostrado como curiosidade no Ensino Médio.

## Método 4: método Cartesiano

O *método cartesiano* foi demonstrado no século XVIII pelo inglês *Sir John Leslie, em Elements of Geometry*. Deseja-se resolver a equação $x^2 - bx + c = 0$. Sobre o sistema de coordenadas cartesianas, marquemos os pontos: $A(0,1)$ $e$ $B(b,c)$. Constrói-se um círculo de diâmetro $AB$. Os pontos que o círculo tocar o eixo da abscissa serão as raízes da equação dada, ou seja, a equação da circunferência construída é dada por $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-1}{2}\right)^2$ e quando $y = 0$, tem-se $x^2 = bx + c^2$.

**Figura 1.** Raízes de pelo método cartesiano




**Fonte:** o autor

## Método 5: método da soma e produto

O *método da soma e produto* é considerado bastante prático quando se deseja obter as raízes de uma equação do 2º grau. Nesse método, é preciso pensar em dois números x' e x'' que quando somados, geram como resultado o valor oposto ou contrário ao quociente entre os coeficientes b e a da equação. Ao mesmo tempo, quando esses dois números são multiplicados, devem gerar como resultado o valor igual ao quociente entre os coeficientes e da equação. Os números x' e x'' e são as raízes da equação do grau $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ e $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$.

Assim, para utilizar o método com facilidade, a dica é começar pensando nas possibilidades que levam ao produto entre as duas raízes da equação. Depois de elencadas essas possibilidades, basta substituí-las na fórmula da soma, e ver se os resultados se encaixam.

## Método 6: método do quadrado e da diferença

Sabe-se que

$$(x' + x'')^2 = (x')^2 + 2x'x'' + (x'')^2 \text{ e } (x' - x'')^2 = (x')^2 + 2x'x'' + (x'')^2.$$

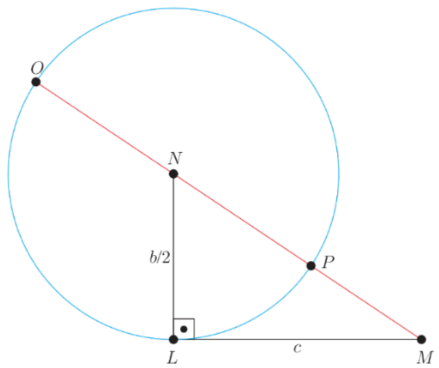
Subtraindo membro a membro a primeira identidade da segunda obtemos a seguinte identidade $(x' + x'')^2 - 4x'x'' = (x' - x'')^2$. Pode-se agora resolver qualquer equação do 2º grau seguindo o seguinte procedimento: Sabendo que $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ e $x'.x'' = \frac{c}{a}$ e de posse desses dados podemos calcular a diferença entre as raízes e através de um sistema de equações do 1º grau teremos a solução. Noutras palavras, tem-se que $s^2 - 4p = d^2$. Sendo assim, pode-se formar o seguinte sistema de equações lineares $S\colon \begin{cases} x' - x'' = d \\ x' + x'' = s \end{cases}$. Somando as duas equações do sistema linear $s$, tem-se $2x' = d + s \Rightarrow x' = \frac{d+s}{2}$ e $x'' = -\frac{d-s}{2}$.

## Método 7: método de Descartes

Em 1667, de acordo com VALE (2013) René Descartes desenvolve um método geométrico que permite-nos obter a solução positiva de uma equação do segundo grau quando esta existe. Ainda segundo VALE (2013), em sua obra *O discurso do método* René Descartes resolve equações do tipo $x^2 = bx + c^2, x^2 = c^2 - bx$ e $x^2 = bx - c^2$.

A seguir será feito a reprodução do método de Descartes para resolver cada uma das equações acima. Considere primeiramente a equação $x^2$=bx+$c^2$.

**Figura 2.** Método de Descartes – Primeiro e segundo casos




**Fonte:** o autor

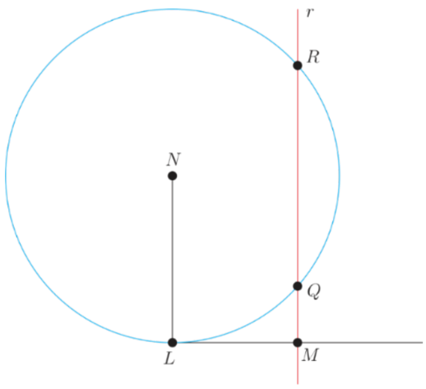
Trace um segmento $\overline{LM}$ de comprimento $c$ e considere um segmento $\overline{LN}$ de comprimento $\frac{b}{2}$ perpendicular a $\overline{LM}$. Com centro em $N$, construa um círculo de raio $\overline{LN}$ e, traçando-se a reta $MN$, determina os pontos antípodas $O$ e $P$, relativamente à circunferência em questão. O segmento $\overline{OM}$ é, pois, a solução positiva da equação.

De fato, considerando o triângulo retângulo $LMN$, segue-se do Teorema de Pitágoras que $|MN|^2 = |LM|^2 + |LN|^2$. Sabe-se que $|LM| = c$ e $|LN| = |NO| = \frac{b}{2}\cdot$ Deste modo, fazendo $|OM| = x$, tem-se que $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2$. De onde resulta $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$ que é a raiz positiva da equação dada. Sabe-se que a outra raiz é $-|PM|$.

No entanto, segundo VALE (2013), essa raiz não foi considerada por Descartes. Veja agora como tratar a equação $x^2 = c^2 - bx$. Da Figura 2, nota-se que $|PM| = |MN| - |NP|$. Observa-se ainda que, do Teorema de Pitágoras $|MN| = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$. Sendo $NP$ um raio, tem-se $|NP| = \frac{b}{2}\cdot$

Consequentemente, $|PM| = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$. Obviamente, a raiz negativa (desconsiderada por Descartes segundo VALE (2013)) é $-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$. Finalmente, se a equação é da forma $x^2 = bx - c^2$, a estratégia é a seguinte: traçamos os segmentos perpendiculares $LM$ e $LN$ de modo que $|LM| = c$ e $|LN| = \frac{b}{2}\cdot$ Considere a reta $r$ que passa por $M$ e é paralela a $LN$. Traçando-se a circunferência de raio $LN$ e centro $N$, determina-se sobre $r$ os pontos $P$ e $Q$.

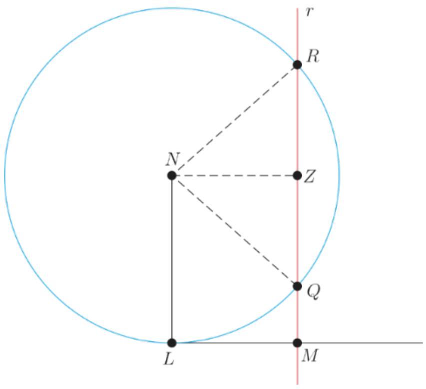
**Figura 3.** Método de Descartes – Terceiro caso




**Fonte:** o autor

O valor desejado de  é dado ou por  ou por  a depender da situação.

**Figura 4.** Método de Descartes – Terceiro caso: determinando a raiz positiva




**Fonte**: o autor

Na Figura 4 tem-se $|MR| = |MZ| + |ZR|$. Note que $|MZ| = |NL| = \frac{b}{2}\cdot$ Sendo o triângulo $RZN$ retângulo em $Z$, segue do Teorema de Pitágoras que

$$|NR|^2 = |NZ|^2 + |ZR|^2 = |NR|^2 \Rightarrow |ZR|^2 = |NR|^2 - |NZ|^2$$

e, deste modo, $|ZR|^2 = \sqrt{|NR|^2 - |NZ|^2}$. Como $NR$ é o raio da circunferência, tem-se $|NR| = \frac{b}{2}\cdot$ Observa-se também que $|LM| = |NZ| = c$. Deste modo, $|ZR| = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2}$ e, consequentemente, $|MR| = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2}$. Para ver que a outra raiz é $|MQ|$, nota-se inicialmente que $|MQ| = |MZ| - |ZQ|$. Sabe-se que $|MZ| = \frac{b}{2}$ e $|NZ| = c$. Uma vez que o triângulo $NZQ$ é retângulo em $Z$, segue do Teorema de Pitágoras que $|NQ|^2 = |NZ|^2 + |ZQ|^2$, donde $|ZQ| = \sqrt{|NQ|^2 - |NZ|^2}$. Substituindo as medidas dos segmentos na igualdade acima, conclui-se que $|ZQ| = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2}$. Consequentemente, $|MQ| = \frac{b}{2} -$

$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2}$.

Segundo VALE (2013), neste caso Descartes obteve as duas raízes pois ambas são positivas.

## Método 8: fórmula de Bháskara

Considere a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$. Uma vez que $a \neq 0$, podemos dividir ambos os membros desta equação por $a$ de modo a obter-se a equação equivalente $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Somando $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ a ambos membros da igualdade acima, obtém-se a equação equivalente $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\cdot$ Observe agora que $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ e que

$$\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Logo, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, donde $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e, consequentemente, $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, isto é, $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2 4ac}}{2a}$.

Tendo em mãos os coeficientes e o discriminante de uma equação do 2º grau, pode-se utilizar a fórmula $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ para encontrar os seus resultados. Note que existe um sinal ± antes da raiz. Isso significa que existirão dois resultados para essa equação: um para $-\sqrt{\Delta}$ e outro para $+\sqrt{\Delta}$.

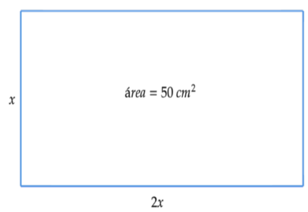
Uma equação do 2º grau possui a seguinte lei de formação: $ax^2+bx+c=0$, em que a, b e c são os coeficientes.

**Exemplo 5.** Na equação $4x^2-4x-24=0$, os coeficientes são $a=4$, $b=-4$ e $c=-24$. E o valor de delta é $\Delta=400$. Substituindo $\Delta=400$ na fórmula $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, obtém-se os dois resultados procurados $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{400}}{2\cdot 4}=\frac{4\pm 20}{8}\cdot$ Denota-se o primeiro valor por $x'$. Neste, usa-se o resultado positivo ou negativa raiz quadrada de $\sqrt{400}$. Essa decisão fica a critério de quem vai resolver a equação. No nosso caso, será usado o sinal positivo, ou seja, $x'=\frac{4+20}{8}=\frac{24}{8}=3$. Representa-se o segundo valor por x'' e será usado o sinal negativo da raiz quadrada ora exposto, tendo em vista que já foi usado o sinal positivo, ou seja, $x'=\frac{4-20}{8}=\frac{-16}{8}=-2$. Os valores de $x'$ e $x''$ chamam-se *raízes* da equação, cuja solução representa-se por $s=\{3,-2\}$.

**Exemplo6.** Calcular as medidas dos lados de um retângulo cuja base mede o dobro da largura e sua área é igual a $50\ cm^2$.

**Resolução:** considere a Figura 5 abaixo.

**Figura 5.** Retângulo de altura  e base




**Fonte**: o autor

Se a base do retângulo da Figura 5 mede o dobro da altura, pode-se dizer que a altura mede $x$ e a base mede $2x$. Como a área de um retângulo é o produto de sua base por altura, então se tem $A = 2x.x = 2x^2$, em que $A$ representa a área do retângulo. Substituindo $A = 50\ cm^2$ no primeiro membro da $A = 2x^2$, obtém-se

$$50 = 2x^2 \text{ ou } 2x^2 - 50 = 0.$$

Observa-se que a $2x^2 - 50 = 0$ possui os coeficientes: $a = 2$, $b = 0$ e $c = -50$.

Substituindo $a = 2$, $b = 0$ e $c = -50$ na igualdade $\Delta = b^2 - 4.a.c$, tem-se

$$\Delta = (0)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-50) = 0 - 8 \cdot (-50) = 400.$$

Permutando $a = 2$, $b = 0$, $c = -50$ e $\Delta = 400$ na fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$, resulta

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{400}}{2 \cdot 2} = \frac{0 \pm 20}{4} = \frac{\pm 20}{4} = \pm 5.$$

Logo, $x' = 5$ ou $x'' = -5$ cuja solução é $S = \{5, -5\}$.

Como não existe comprimento negativo para um lado de um polígono, a solução para o problema é $x = 5$ cm para o lado menor e $2 \cdot 5 = 10\ cm$ para o lado maior.

**Exemplo 7.** Na copa do mundo de futebol, durante a fase de classificação os times estão divididos em 8 grupos de $x$ times cada. Nesta fase, cada time deve enfrentar os demais times do seu grupo uma única vez. Se nesta fase foram disputados 48 jogos, quantos times disputam a copa do mundo de futebol?

**Resolução:** considerando-se um grupo de $x$ times, para elegermos um confronto, temos $x$ possibilidades para o mandante e, consequentemente, $x - 1$ possibilidades para o visitante. Uma vez que os times jogam entre si uma única vez temos, dos princípios de contagem que $\frac{x(x-1)}{2}$ partidas por grupo são disputadas. Deste modo, sendo o total de partidas disputadas igual a 48 e o número de grupos igual a 8, tem-se $8 \cdot \frac{x(x-1)}{2} = 48$ ou, de modo equivalente, $x^2 - x - 12 = 0$.

Observa-se que os coeficientes da equação $x^2 - x - 12 = 0$ são: $a = 1$, $b = -1$ e $c = -12$. Deste modo, $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$.

Consequentemente, $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2}$. Observa-se que $x$ representa uma grandeza positiva e, portanto, a raiz negativa da equação deve ser desprezada, o que nos permite inferir que $x = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$. Logo, cada grupo possui 4 times e, uma vez que são 8 grupos, tem-se que $8 \cdot 4 = 32$ times disputam a copa do mundo de futebol.

## Principais aplicações

Pode-se utilizar a equação do 2º grau em diversas aplicações práticas no cotidiano. De fato, as aplicações variam aos inúmeros casos particulares, seja como uma técnica para resolver problemas, mas avançados, ou até mesmo para usar como ferramenta no cálculo de um projétil, incluindo neste caso a descrição de uma parábola aliado ao estudo do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV) existente na Cinemática, quando é estudado na

Física.

**Exemplo .9.** Um ponto material obedece à função horária

$$s = -30 + 5 \cdot t + 5 \cdot t^2\ (SI), t \geq 0.$$

Calcular o instante em que o móvel passa pela origem.

**Resolução:** fazendo $s = 0$ e substituindo na equação $s = -30 + 5 \cdot t + 5 \cdot t^2\ (SI)$, obtém-se $0 = -30 + 5 \cdot t + 5 \cdot t^2 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0$.

Resolvendo a equação $t^2 + t - 6 = 0$, tem-se

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$

e

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \\ t = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Logo, $t = 2$ ou $\mathrm{t} = -3$. Como $t \geq 0$, então $t = 2\mathrm{s}$.

O Exemplo 9 é um tipo de exemplo indispensável na física, usando a equação do 2º grau como uma ferramenta aliada ao cálculo do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV) existente na Cinemática. Portanto, em busca de novas aplicações e implicações que a ferramenta da resolução de uma equação do 2º grau oferece, é que matemáticos do mundo todo estão buscando ainda modelos e padrões inovadores a fim de mostrar que a matemática tem muito ainda para nos oferecer.

Para saber como uma equação se aplica no cotidiano, precisa-se saber primeiramente o que é uma parábola.

Chama-se *parábola* uma seção cônica cujos pontos são representados num sistema de coordenadas cartesianas através de uma equação do 2º grau.

No estudo da Geometria Analítica, depara-se com três seções cônicas que são oriundas de cortes efetuados em um cone: a *hipérbole*, a *elipse* e a *parábola*. O estudo da parábola, em específico, foi fortemente divulgado pelo matemático Pierre de Fermat (1601-1655) que estabeleceu que a equação do 2º grau representasse uma parábola quando seus pontos são aplicados em um plano cartesiano.

Há muitas situações definidas pelas equações do 2º grau, principalmente por meio de uma parábola, demonstrando assim o seu uso no dia a dia, como exemplos disso, temos: A trajetória de uma bola lançada para a frente é uma parábola. Se fizermos vários furos em várias parábolas, dentre as dezenas de aplicações da parábola a situações da vida, as mais importantes alturas num bote cheio de água, os pequenos jorros de água que saem pelos furos são descritos assim:

**Faróis de carros:** se colocar uma lâmpada no foco de um espelho com a superfície parabólica e a lâmpada emitir um conjunto de raios luminosos que venham a refletir sobre o espelho parabólico do farol, os raios refletidos sairão todos paralelamente ao eixo que contém o "*foco*" e o vértice da superfície parabólica. Esta é uma propriedade geométrica importante ligada à *Ótica*, que permite valorizar bastante o conceito de parábola no âmbito do Ensino Fundamental.

**Antenas parabólicas:** se um satélite artificial colocado em uma órbita geoestacionária emite um conjunto de ondas eletromagnéticas, estas poderão ser captadas pela sua antena parabólica, uma vez que o feixe de raios atingirá a sua antena que tem formato parabólico e ocorrerá a reflexão desses raios exatamente para um único lugar, denominados o foco da parábola, onde estará um aparelho de receptor que converterá as ondas eletromagnéticas em um sinal que a TV poderá transformar em ondas que por sua vez significarão filmes, jornais e outros programas que você assiste normalmente.

**Radares:** os radares usam as propriedades óticas da parábola, similares às citadas anteriormente para a antena parabólica e para os faróis.

**Lançamentos de projéteis:** ao lançar um objeto no espaço (dardo, pedra, tiro de canhão) visando alcançar a maior distância possível tanto na horizontal como na vertical, a curva descrita pelo objeto é aproximadamente uma parábola, se considerarmos que a resistência do ar não existe ou é pequena.

E por fim, conclui-se que as equações do 2º grau foram uma invenção que facilitou outras invenções e nos deu a oportunidade de ter noção exata de onde, como e porque mesmo sem perceber as equações do 2º grau estão presentes em inúmeras situações cotidianas.

## Considerações Finais

Os professores de matemática de forma geral têm passado por momentos angustiantes quando se refere às questões de aprendizagem, por ser uma área que trata da complexidade dos números, os problemas de ensino-aprendizagem nesta área são gritantes tanto nas aulas teóricas quanto nas aulas práticas. Os vestígios herdados dos reflexos históricos de um ensino reprimido da matemática, até hoje refletem nos nossos alunos e isto tem comprometido o ensino-aprendizagem nesta área do conhecimento.

Convém destacar que os professores de Matemática sendo democráticos, bem preparados, com boa formação e, sobretudo apresentam um bom temperamento nas relações interpessoais com alunos as quais deveriam facilitar o processo de assimilação dos conteúdos pelos alunos.

Faz-se necessário abordar que com o diálogo e interação junto aos educandos, para alguns implica na valorização dos conteúdos, enquanto outros não entendem dessa forma. Os alunos são vistos pelos professores como seres capazes de pensar e se relacionar com harmonia, não como depósitos de conteúdos desvinculados da realidade do aluno.

Portanto, a avaliação da matemática requer do professor cada vez mais compromisso com o processo de ensino, daí vale ressaltar que a influência dos domínios da Matemática é um processo que vai se configurando à medida que o professor promove ações pedagógicas cabíveis com a realidade de cada um, para isso é necessário que a escola faça um trabalho coletivo entre professor, escola e alunos, por fim, avaliar é um processo continuo e lento que se processa da educação do aluno como um todo.

A prática educativa atualmente vem perdendo sua característica discriminatória e classificatória, e aos poucos ganhando campo no processo avaliativo diagnostico. Vários educadores do ramo da matemática estão preocupados com o crescimento intelectual dos alunos e a socialização de saberes, por isso tem se apropriado da avaliação com o objetivo de obter informações sobre o desempenho dos estudantes.

Diante de tal fato, verifica-se que a escola tem professores de matemática democráticos, mas, inseguros quanto às mudanças, os quais poderão ver na avaliação uma arma de tortura ou punição para os alunos apáticos ou indisciplinados. Por esta razão, um professor responsável pelas suas ações pedagógicas e seguro nas suas práticas docentes podem contribuir de forma relevante para construção do conhecimento e a partir da avaliação fazer um diagnóstico dos avanços e dificuldades dos alunos.

E ainda caminham a passos lentos, os professores de matemática em sua maioria continuam avaliando os alunos apenas de forma curricular e esquecem que estes alunos precisam ser avaliados para a vida e não apenas por um sistema avaliativo que promove a exclusão social e intelectual dos alunos do meio escolar. Segundo os PCN's (1998, p. 68) a avaliação pode assumir um caráter eminentemente formativo, favorecedor do processo pessoal e da autonomia do aluno, integrada ao processo de ensino-aprendizagem, para permitir ao aluno consciência de seu próprio caminhar em relação ao conhecimento e permitir ao professor controlar melhor a sua prática pedagógica.

Esses problemas decorrem em função da falta de valorização da sua importância no planeta Terra, diante de tantos problemas e dificuldades que configuram o ensino-aprendizagem da Matemática, é necessário que todos os educadores despertem o interesse para uma prática conjunta a partir de fatores que motive os alunos, a valorizarem o repertório dos conteúdos que são ensinados na escola.

A importância da matemática, especialmente a utilização da equação do segundo grau, deve também ser ressaltada no pensar do que se pretende formar para o mercado de trabalho, pois a geração de habilidade/capacidade que deve ser construída no indivíduo de modo que o mesmo possa adaptar-se em toda e nova situação a ser vivenciada no mundo do trabalho.

Conclui-se afirmando que devemos apresentar aos estudantes uma matemática que relacione a prática com a teoria, levando-os a resolverem situações-problemas não somente aquelas presentes na realidade, mas também aquelas situações imaginadas. Estas últimas também permitem que o estudante use ferramentas necessárias e importantes para sua resolução, despertando assim o pensamento crítico.

## Referências

AMARAL, J. T. **Método de Viéte para resolução de equação do segundo grau.** Revista do Professor de Matemática, [s.l.], n. 13, p.18-20, 01 dez. 1988.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Fundamentos pedagógicos e estrutura geral da BNCC.* Brasília, DF, 2018.

**______. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº 9.396 de 20 de dezembro de 1996**. Brasília, 1996.

______. Ministério da Educação e Cultura**. Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC, 1998.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. 2º edição. São Paulo: Edgar Blucher, 2003.

CRISTALDO, J. (12/02/1995) **- Uma teocracia na Amazônia - Ponto Crítico**. Folha de São Paulo.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática:** elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**.3. ed. Campinas: Unicamp, 2002.

LORENZATO, Sergio. **Por que não ensinar geometria? A Educação matemática em revista**. São Paulo, ano III, n. 4, 1995.

PEREZ, Geraldo. **A Realidade sobre ensino da geometria no 1º e 2º grau**. São Paulo, ano III, n. 4, p. 54-62, 1995.

PITOMBEIRA, João Bosco Fernandes de Carvalho. **Matemática:** Ensino Fundamental/ Coordenação. - Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004. 248 p.: il. (Coleção Explorando o Ensino)

RIBEIRO, Alessandro Jacques; CURY, Helena Noronha. Álgebra para a formação do professor.

Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

VALE, Alberton Fagno Albino. **As diferentes estratégias de resolução do segundo grau.** Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró, para obtenção do título de Mestre em Matemática. MOSSORÓ 2013.

YANAMOTO, Kazuhito. **Física para o ensino médio:** mecânica. 4. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v.1.

Recebido em 27 de agosto de 2020.
Aceito em 15 de setembro de 2020.